7. Tutorium - Lösungen 15.05.2020

7.1 Energie-Impuls-Tensor

Man findet:
a) $\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\rho} j_\rho$
b) $TrT^{\mu\nu} = 0$.

7.2 Multipolmomente eines Kreuzes

a) Die Ladungsdichte lässt sich mit θ- und δ-Funktionen anschreiben:

$$\rho(\vec{x}) = \lambda \left[\theta(a+x)\theta(a-x)\delta(y)\delta(z) + \theta(b+y)\theta(b-y)\delta(x)\delta(z)\right]$$

Die Gesamtladung ist:

$$Q = \int \rho(x) d^3x = 2\lambda(a+b)$$

b) Das Dipolmoment ist:

$$p_i = \int d^3x \, x_i \rho(x_i) = 0$$

Das Quadrupolmoment ist definiert über:

$$Q_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x})(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$$

Man erhält:

$$Q_{xx} = \frac{2\lambda}{3}(2a^3 - b^3)$$

$$Q_{yy} = \frac{2\lambda}{3}(-a^3 + 2b^3)$$
$$Q_{zz} = \frac{2\lambda}{3}(-a^3 - b^3)$$

Für $i \neq j$ sind alle Quadrupolmomente 0.
c) Das Potential bis zur Quadrupolordnung ist:

$$\phi(x_i) = \frac{Q}{r} + \frac{x_i p_i}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{Q_{ij} x_i x_j}{r^5} + \dots$$

In unserem Fall ist $\vec{x} = (0, 0, z)$ und mit den Resultaten aus Aufgabe (b):

$$\phi(0, 0, z) = \frac{2\lambda(a+b)}{z} + \frac{\lambda(-a^3 - b^3)}{3z^3}$$

d) Das elektrische Feld erhalten wir als Gradienten des Potentials. Allgemein berechnet man:

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \phi \\ &= \frac{Q x_i}{r^3} + \frac{3(p_j x_j)x_i - r^2 p_i}{r^5} + \frac{1}{2}\frac{5(Q_{jk} x_j x_k)x_i - 2Q_{ik} x_k}{r^7} \end{aligned}$$

Für unser Beispiel ist das:

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{2\lambda(a+b)}{z^2}\vec{e}_z + \frac{\lambda(-a^3 - b^3)}{z^4}\vec{e}_z$$

7.3 Multipolmomente von Ellipsoiden

a) Elektrostatisches Potential über Kugelflächenfunktionen:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \qquad \text{mit } q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int \mathrm{d}^3 r' \, r'^l Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}\,').$$

Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q^*_{lm}$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.
Da das System rotationssymmetrisch um die z-Achse ist, fallen alle Y_{lm} die φ enthalten weg:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} \mathrm{d}\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Also $q_{11} = q_{22} = q_{21} = 0$. Da $Y_{10} \sim \cos\vartheta = z/r$ ungerade bezüglich z ist, aber das Ellipsoid symmetrisch entlang der z-Achse, verschwindet das entsprechende Integral, daher auch q_{10}. Das sieht man auch über

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\vartheta) \cos\vartheta = 0.$$

Bleiben also nur q_{00} und q_{20} zu berechnen.

$$\begin{aligned} q_{00} &= 4\pi \int \mathrm{d}^3 r \, r^0 Y^*_{00}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \\ &= \sqrt{4\pi} \frac{4\pi}{3} a^2 c \rho_0. \end{aligned}$$

Berechnung von q_{20} erfolgt analog:

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{4\pi}{5} \int \mathrm{d}^3 r \, r^2 Y^*_{20}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \\ &= \sqrt{5\pi} \frac{8\pi}{3} a^2 c \rho_0 \left(c^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

Das Potential kann dann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} q_{00} Y_{00}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r^3} q_{20} Y_{20}(\vartheta, \varphi) \\ &= \frac{4\pi}{3} a^2 c \rho_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{c^2 - a^2}{10} \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

b) Elektrostatisches Potential über Kugelflächenfunktionen:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \qquad \text{mit } q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int \mathrm{d}^3 r' \, r'^l Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}\,').$$

Multipolmomente mit negativem m lassen sich berechnen über $q_{l,-m} = (-1)^m q^*_{lm}$, was direkt von der entsprechenden Relation der Y_{lm} folgt.
Da das System rotationssymmetrisch um die z-Achse ist, fallen alle Y_{lm} die φ enthalten weg, also $q_{11} = q_{22} = q_{21} = 0$.
Für das Ellipsoid gilt $q_{00} = 0$, da sich die positiven und negativen Ladungen integriert gegenseitig aufheben. Bleiben also nur Dipolmomente. Weiters folgt $q_{11} = 0$ aufgrund der Rotationssymmetrie um φ. Bleibt q_{10} zu berechnen:

$$\begin{aligned} q_{10} &= \frac{4\pi}{3} \int \mathrm{d}^3 r \, r Y^*_{10}(\vartheta, \varphi) \rho(\vec{r}) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}} \pi a^2 c^2 \rho_0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie um den Winkel φ verwinden auch $q_{21} = q_{22} = 0$. Weiters verschwindet $q_{20} = 0$, weil $Y_{20} \sim (3\cos^2\vartheta - 1)$ gerade in $\cos\vartheta$ ist, aber die Ladungsverteilung $\rho(\vartheta)$ ungerade. Das Potenzial des Dipols lautet:

$$
\begin{aligned}
\phi^{(b)}(\vec{r}) &= \frac{1}{r^2} q_{10} Y_{10}(\vartheta, \varphi) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \cos\vartheta .
\end{aligned}
$$

c) In großen Entfernungen wirkt das erste Ellipsoid wie ein elektrischer Monopol, also wie eine Punktladung mit Gesamtladung $Q = 4\pi a^2 c\rho_0/3$, und das zweite Ellipsoid wie ein elektrischer Dipol. Zu untersuchen ist also die Wirkung eines elektrischen Dipolfeldes auf eine Punktladung. Wegen $\vec{F} = q\vec{E}$ genügt es, das elektrische Feld zu kennen. Dieses ist über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ berechenbar.
Gradient in Kugelkoordinaten:

$$
\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.
$$

Man erhält dann:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi \\
&= \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \frac{1}{r^3} \left(2\vec{e}_r \cos\vartheta + \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta\right) \\
&= \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi}{2} a^2 c^2 \rho_0 \frac{3\left(\vec{e}_z \cdot \vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5},
\end{aligned}
$$

wobei die letzten vier Zeilen verschiedene Varianten des Endergebnisses sind. Hierbei wurden die Einheitsvektoren verwendet:

$$
\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Kraft ergibt sich aus $\vec{F} = Q\vec{E}$ mit $Q = 4\pi a^2 c\rho_0/3$:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= Q\vec{E} \\
&= \frac{3}{8} Q^2 c \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3\cos\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 3\cos^2\vartheta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{8} Q^2 c \begin{pmatrix} 3xz \\ 3yz \\ 3z^2 - r^2 \end{pmatrix} \frac{1}{r^5} \\
&= \frac{3}{8} Q^2 c \frac{3\left(\vec{e}_z \cdot \vec{r}\right)\vec{r} - r^2\vec{e}_z}{r^5}
\end{aligned}
$$

wobei das Ergebnis in verschiedenen möglichen Varianten aufgeschrieben wurde.