8. Tutorium - Lösungen 29.05.2020

8.1 Zylinderförmiger Elektret

a) Im Inneren des Zylinders $R < a$ hat man $\rho_P(\vec{r}) = -\mathrm{div}\vec{P}(\vec{r}) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(RP_R(R)) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(P_0\frac{R^2}{a}\right) = -\frac{2P_0}{a} =: \rho_0$.
Am Rand des Zylinders $R = a$ gilt: $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{P}_\mathrm{a}}_{0} - \vec{P}_\mathrm{i}) = +P_R(R \to a) = P_0 =: \sigma_0$.
Gesamtladung pro Längeneinheit: $q_P = \pi a^2\cdot 1\cdot\rho_0 + 2\pi a\cdot 1\cdot\sigma_0 = \pi a^2\cdot 1\cdot\left(-\frac{2P_0}{a}\right) + 2\pi a\cdot 1\cdot P_0 = 0$.
b) Lösungsweg 1: über das $\vec{E}$ Feld
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi(\underbrace{\rho(\vec{r})}_{0} + \rho_P(\vec{r})), \qquad \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$.
Aus Symmetriegründen: $\vec{E}(\vec{r}) = E_R(R)\vec{e}_R$.
Im Inneren gilt (Integration über Zylinder Z_R mit Radius R):
$\int_{F(Z_R)} \vec{E}\cdot d\vec{f} = 4\pi\int_{Z_R}\rho_P(\vec{r})d^3r$,
mit $\vec{E} = E_R(R)\vec{e}_R$ und $d\vec{f} = Rd\varphi dz\vec{e}_R$ erhält man:
$$2\pi\cdot 1\cdot E_R(R)R = 4\pi\int_{Z_R}\rho_P(\vec{r})d^3r = \begin{cases} 4\pi\cdot\pi R^2\cdot 1\cdot\rho_0 & \text{für } R < a,\\ 0 & \text{für } R > a.\end{cases}$$
$$\to E_R = \begin{cases} -4\pi P_0\frac{R}{a} & \text{für } R < a,\\ 0 & \text{für } R > a.\end{cases}$$
Daraus folgt $\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi\vec{P}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}) & \text{für } R < a,\\ \vec{0}+\vec{0} & \text{für } R > a.\end{cases}$
$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{0}$ innen und außen.
Lösungsweg 2: über das $\vec{D}$ Feld
$R < a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$
$R > a$: $\mathrm{div}\vec{D}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) = 0, \qquad \mathrm{rot}\vec{D}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ (auch keine Quellen und Wirbel von $\vec{D}$ im Unendlichen)
$R = a$: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma = 0, \qquad \mathrm{Rot}\vec{D} = \underbrace{\mathrm{Rot}\vec{E}(\vec{r})}_{\vec{0}} + 4\pi\underbrace{\mathrm{Rot}\vec{P}(\vec{r})}_{\vec{0}} = \vec{0}$.
$$\Rightarrow\vec{D}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ im ganzen Raum} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r}) - 4\pi\vec{P}(\vec{r}) = -4\pi\vec{P}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi P_0\frac{R}{a}\vec{e}_R & \text{für } R < a,\\ \vec{0} & \text{für } R > a.\end{cases}$$

8.2 Kreisförmige Plattenkondensatoren

a) Wegen $d \ll R_0$ können Randeffekte vernachlässigt werden: $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ besitzen nur eine z-Komponente, σ, σ_P sind homogen auf den Metallplatten, ρ_P hängt nur von z ab.
Die freie Flächenladungen liegen bei $z = 0$ und $z = d$: $\sigma(z = d) = Q/(\pi R_0^2)$, $\sigma(z = 0) = -Q/(\pi R_0^2)$.
Es ist zweckmäßig, zuerst $\vec{D}$ zu berechnen: $\mathrm{Div}\vec{D} = 4\pi\sigma$, $\mathrm{div}\vec{D} = \partial_z D_z(z) = 4\pi\rho = 0$ innen und außen. Somit ist das $\vec{D}$-Feld im Dielektrikum homogen. An der obere Platte gilt $\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{D}_a}_{0} - \underbrace{\vec{D}_i}_{D_z}) = 4\pi\sigma = 4Q/R_0^2$.
Somit gilt $\vec{D}(\vec{r}) = -4Q/R_0^2\vec{e}_z$ im Dielektrikum.
Weiters gilt $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{e}_z$ mit $E_z(z) = D_z/\epsilon(z)$, $\vec{P}(\vec{r}) = P_z(z)\vec{e}_z$, $P_z(z) = \chi_e E_z(z) = \frac{\epsilon-1}{4\pi}E_z(z)$. Somit

ergibt sich

$$E_z(z) = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}, \qquad P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\right).$$

b) Freie Flächenladungsdichte σ: siehe (a).
Die Polarisations-Flächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma_P = -\mathrm{Div}\vec{P} = -\vec{n}\cdot(\underbrace{\vec{P}_a}_{0} - \underbrace{\vec{P}_i}_{P_z(d)})$. Somit folgt

$$\sigma_P(z=d) = P_z(d) = -\frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right), \qquad \sigma_P(z=0) = -P_z(0) = \frac{Q}{\pi R_0^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0}\right).$$

Die Polarisationsraumladungsdichte ist $\rho_P(z) = -\mathrm{div}\vec{P} = -\partial_z P_z(z) = -\frac{Q}{\pi R_0^2 d}\frac{\Delta\epsilon}{\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)^2}$ im Dielektrikum.
c) Berechne die Kapazität der Anordnung.
Kapazität $C = Q/U$ mit $U = \phi(z=d) - \phi(z=0)$. Mit $\vec{E} = -\mathrm{grad}\phi = -\partial_z\phi(z)\vec{e}_z \Rightarrow$

$$\phi(d) - \phi(0) = -\int_0^d E_z(z)\mathrm{d}z = \int_0^d \frac{4Q}{R_0^2}\frac{1}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}}\mathrm{d}z = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\epsilon_0 - \Delta\epsilon\frac{z}{d}\right)\Bigg|_0^d = -\frac{4Q}{R_0^2}\frac{d}{\Delta\epsilon}\ln\left(\frac{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right).$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{-\Delta\epsilon}{\ln\left(1 - \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right)} = \frac{R_0^2}{4d}\frac{\Delta\epsilon}{\ln\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \Delta\epsilon}\right)}.$$

8.3 Hohlraum in Dielektrikum

a) Es gilt $\vec{D}_0 = \epsilon\vec{E}_0 = \vec{E}_0 + 4\pi\vec{P}_0$
und somit $\vec{E}_0 = \frac{4\pi}{\epsilon - 1}\vec{P}_0$.
b)Die Feldgleichungen für $\vec{E}(\vec{r})$ lauten:
$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 0$, $\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$, für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$E_r^i(r=a,\theta) = \epsilon E_r^a(r=a,\theta)$,
$E_\theta^i(r=a,\theta) = E_\theta^a(r=a,\theta)$.
(das entspricht $\mathrm{Div}\vec{D} = 0$, $\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{0}$).
Im Unendlichen gilt $E_r^a(r\to\infty,\theta) \to E_0\cos\theta$.

Die Feldgleichungen für $\phi(\vec{r})$ lauten:
$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \neq a$.
Die Stetigkeits- / Randbedingungen lauten:
$\frac{\partial\phi_i(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r=a} = \epsilon\,\frac{\partial\phi_a(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r=a}$.
$\phi_i(r=a,\theta) = \phi_a(r=a,\theta)$.
$-\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} \to E_0\cos\theta$.
c)$r \neq a$: $\Delta\phi(r,\theta) = 0$.
Im Außenraum gilt: $r > a$: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^\infty\left(\frac{a_l}{r^{l+1}} + b_l r^l\right)P_l(\cos\theta)$.
Aus $-\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} \to E_0\cos\theta$ folgt
$-\frac{\partial\phi(r,\theta)}{\partial r} = +\sum_{l=0}^\infty\frac{(l+1)a_l}{r^{l+2}}P_l(\cos\theta) - \sum_{l=1}^\infty l b_l r^{l-1}P_l(\cos\theta) \to \frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0\underbrace{\cos\theta}_{=P_1(\cos\theta)}$
$\to b_1 = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0$, $b_l = 0$ für $l \geq 2$. Die Konstante b_0 kann man beliebig setzen, z.B. $b_0 = 0$.
$\to \phi(r,\theta) = -\frac{4\pi}{\epsilon-1}P_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^\infty\frac{a_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

Im Innenraum gilt: $r < a$: $\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^\infty c_l r^l P_l(\cos\theta)$.
Die Stetigkeitsbedingungen bei $r = a$ ergeben:

Aus $\phi_i(r=a,\theta) = \phi_a(r=a,\theta)$ folgt:
$c_0 = \frac{a_0}{a}$, $c_1 a = -\frac{4\pi}{\epsilon-1} P_0 a + \frac{a_1}{a^2}$,$c_l = \frac{a_l}{a^{2l+1}}$ für $l \geq 2$.
Aus $\left.\frac{\partial \phi_i(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = \epsilon \left.\frac{\partial \phi_a(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a}$ folgt:
$\sum_{l=1}^{\infty} l c_l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \epsilon \left[-\frac{4\pi}{\epsilon-1} P_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)a_l}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta) \right]$
Koeffizientenvergleich liefert $a_0 = 0$, $c_0 = 0$.
$a_1 = -\frac{4\pi}{2\epsilon+1} a^3 P_0$.
$c_1 = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} P_0$.
$c_l = a_l = 0$ für $l \geq 2$.
Somit gilt im Innenraum $r < a$:
$\phi(r,\theta) = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} P_0 \underbrace{r\cos\theta}_{z}$
$\vec{E}(r,\theta) = \frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon+1)(\epsilon-1)} \vec{P}_0$.
$\left|\vec{E}\right| = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} \left|\vec{E}_0\right| > \left|\vec{E}_0\right|$, da $\epsilon > 1$.