9. Tutorium - Lösungen 05.06.2020

9.1 Kugelkondensator

a) Integralform: $\oint_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{D} = \int_V d^3r\, 4\pi\rho$.
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.
$4\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\underbrace{D^{\text{oben}}(r)}_{=E(r)} + \frac{1}{2}\underbrace{D^{\text{unten}}(r)}_{=\epsilon E(r)} \right) = 4\pi Q$.
$2\pi r^2 (1+\epsilon) E(r) = 4\pi Q$.
$E(r) = \frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2}$.
$D(r) = \begin{cases} \frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2} & \text{oben,} \\ \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2} & \text{unten.} \end{cases}$
Rand- und Anschlussbedingungen:
$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma$.
$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$.
An der Kugeloberflächen gilt: Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig:
außen verschwindet $\vec{E}$, innen verläuft es radial →OK.
An der Grenzfläche: die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig:
oben und unten sind E_{radial} gleich.
b) Flächenladung:
$\mathrm{Div}\vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 4\pi\sigma$. Innen und außen verschwindet das Feld.
Innen: $\sigma = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{a^2} & \text{oben,} \\ \frac{1}{4\pi}\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}\frac{Q}{a^2} & \text{unten.} \end{cases}$
Außen: $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{b^2}\begin{cases} 1 & \text{oben,} \\ \epsilon & \text{unten.} \end{cases}$
c) Kapazität:
$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -E(r) = -\frac{2}{1+\epsilon}\frac{Q}{r^2}$.
$U = \phi(a) - \phi(b) = \int_b^a \left(-\frac{2}{1+\epsilon}\right)\frac{Q}{r^2}dr$.
$C = \frac{Q}{U} = \frac{1+\epsilon}{2}\frac{ab}{b-a}$.

9.2 Steighöhenmethode

a) Die Gesamtkapazität ist eine lineare Funktion der Eindringtiefe des Dielektrikums

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{b}{d}\left[x(\epsilon - 1) + h\right]. \tag{1}$$

b) Die gesuchte ponderomotische Kraft lautet

$$F = \frac{1}{8\pi}bd(\epsilon - 1)E_0^2, \tag{2}$$

wobei im letzten Schritt $E_0 = V/d$ verwendet wurde.
c) Bestimmung von ϵ aus der Steighöhe Δx:

$$\epsilon = 1 + \frac{8\pi\rho_m g}{E_0^2}\Delta x \tag{3}$$

Wie zu erwarten war ist das Resultat nicht von der Geometrie des Kondensators abhängig.

9.3 Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten

a) Aus Symmetriegründen gilt $B_x(x,y)$, $B_y(x,y)$, $B_z = 0$.
Die Feldgleichungen für $\vec{B}$ lassen sich für Materie mit Materialgleichung $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(\vec{r})$ allgemein schreiben als
$\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r}) = 0$ und $\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$, also $\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}(\vec{r})$.
Somit gilt
$G_1 : x > 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_1 I_1 \delta(x-d)\delta(y)\vec{e}_z$.
$G_2 : x < 0$: $\mathrm{div}\vec{B}(x,y) = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B}(x,y) = \frac{4\pi}{c}\mu_2 I_2 \delta(x+d)\delta(y)\vec{e}_z$.
Die asymptotische Bedingung für $\vec{B}$ lautet $\vec{B}(x,y) \stackrel{R\to+\infty}{\longrightarrow} \vec{0}$ für $R = \sqrt{x^2+y^2}$.
Die Anschlussbedingungen für $\vec{B}$ für $x = 0$ folgen aus $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$, $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ in der Form
$B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y), \qquad \frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$.
b) Im Raum G_1 für $x > 0$ nimmt man ein Ersatzproblem an:
Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I_1' (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d$, $y = 0$.
Im Raum G_2 für $x < 0$ nimmt man das Ersatzproblem, wo der gesamte Raum Permeabilität μ_2 habe, und der Strom I_2' statt I_1 fließe.
Der Ansatz für das Magnetfeld lautet
In G_1 : $\vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_1 I_1}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_1 I_1'}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right)$.
Dieser Ansatz erfüllt die Feldgleichungen für $x > 0$ und die asymptotische Bedingung.
In G_2: $\vec{B}(x,y) = \frac{2\mu_2 I_2}{c}\left(-\frac{y}{(x+d)^2+y^2}, \frac{x+d}{(x+d)^2+y^2}, 0\right) + \frac{2\mu_2 I_2'}{c}\left(-\frac{y}{(x-d)^2+y^2}, \frac{x-d}{(x-d)^2+y^2}, 0\right)$.
Falls das Einsetzen in die Anschlussbedingungen keinen Widerspruch ergibt, und I_1' und I_2' eindeutig zu berechnen sind, ist die Lösung gefunden.
1. Anschlussbedingung: $B_x(x \downarrow 0, y) = B_x(x \uparrow 0, y)$
$\mu_1 I_1 + \mu_1 I_1' = \mu_2 I_2 + \mu_2 I_2'$.
2. Anschlussbedingung: $\frac{1}{\mu_1}B_y(x \downarrow 0, y) = \frac{1}{\mu_2}B_y(x \uparrow 0, y)$
$-I_1 + I_1' = I_2 - I_2'$.
Auflösen ergibt
$I_1' = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.
$I_2' = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I_1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}I_2$.