Übungsblatt 1

für das Tutorium am 10.03.2023,
Kreuzerldeadline 8:00

1. **Satz von Gauß**
   Berechne für das Vektorfeld
   $$\vec{B} = (x^2y, -xz^2, 2x+z)^T \; : \tag{1}$$
   (a) $\oint_{S=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A}$,
   (b) $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV$,

   wobei das Integrationsvolumen durch $x, y, z \in [0,1]$ begrenzt wird.

   Verifiziere mit den Ergebnissen den Satz von Gauß

2. **Satz von Stokes**
   Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F} = (x^2+y^2, y^2, z)^T$ und eine Fläche S, definiert durch ein Rotationsparaboloid, definiert durch
   $$z = R^2 - x^2 - y^2 \,, \qquad z \geq 0 \,, \quad R \geq 0. \tag{2}$$
   (a) Berechne $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.
   (b) Berechne $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}$.

   Verifiziere mit diesen Ergebnissen den Satz von Stokes.

3. **Indexgymnastik** Bitte bei den Rechnungen Index-Schreibweise verwenden
   (a) Leite die Graßmann-Identität für $\vec{X} \equiv \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \ldots$ her und berechne $\vec{X} \cdot \vec{a}$, $\vec{X} \cdot \vec{b}$, $\vec{X} \cdot \vec{c}$.
   (b) Zeige, dass das Vektorprodukt weder assoziativ noch kommutativ ist.
   (c) Berechne Divergenz und Rotation von $\vec{a} \times \vec{b}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektorfelder sind, die von $\vec{r} = x_i$ abhängen.
   (d) Sei $\vec{r} = x_i$, $r = (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ und $\vec{r'} \neq \vec{r}$. Berechne den Gradient von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$.
   (e) Berechne $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{r}}{r} f(r) \right)$, wobei die skalare Funktion f nur von r abhängt.

Ankreuzbar: 1ab, 2a, 2b, 3abc, 3de