

Übungsblatt 3

für das Tutorium am 24.03.2023,
Kreuzerldeadline 8:00

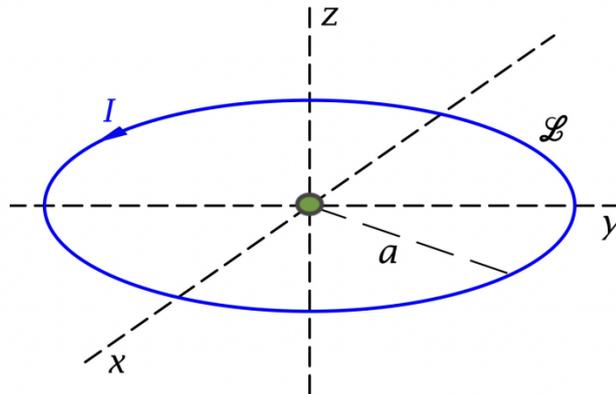
1. Nie zu spät für Dualität

- (a) Betrachte die Maxwellgleichungen im Vakuum ohne äussere Quellen (in Gauß-Einheiten). Zeige, dass die Gleichungen invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ sind. Gilt die Dualität auch noch in Anwesenheit von Quellen?
- (b) Nimm nun an, dass neben elektrischen Ladungen und Strömen (ρ_e, \vec{j}_e) auch noch magnetische Ladungen und Ströme (ρ_m, \vec{j}_m) existieren¹, die sich analog zu den elektrischen Größen verhalten. Wie sehen die Maxwellgleichungen in diesem Fall aus?
- (c) Zeige, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen **invariant** unter einer allgemeineren Version der elektrisch-magnetischen Dualität sind, wo Felder und Quellen in Linearkombinationen derselben transformieren. Wie sehen die **Transformationseigenschaften** der Felder und Quellen aus? Gib die Ergebnisse im **SI** und im **Gauß System** an.
Hinweis: Es geht allgemeiner als nur der Austausch der Feldstärken: Führe eine Winkelvariable ξ ein. Dann transformiert zum Beispiel das elektrische Feld als $\vec{E}' = \vec{E} \cos \xi - \vec{B} \sin \xi$. Wie sehen die Transformationen der anderen Größen aus? Was bedeuten die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$?
- (d) Zeige, dass die Energiedichte und die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes invariant unter der Dualitätstransformation sind.

¹Magnetische Monopole sind in der Natur noch nicht beobachtet worden. Sie spielen jedoch in Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik, z.B. in der Stringtheorie, eine wichtige Rolle.

2. Biot-Savart: Serviert

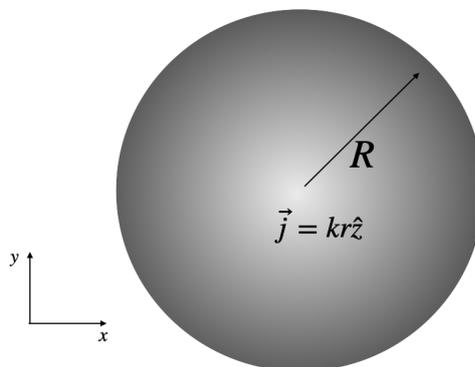
Ein ungeschickter Kellner hat einen Goldrandteller mit einer kleinen Erbse im Zentrum in die Mikrowelle gegeben. Der Rand stellt einen kreisförmigen Linienleiter mit Radius a dar, durch den nun ein annähernd statischer Strom I fließt (siehe Abbildung)



- Berechne mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes das Magnetfeld $\vec{B}(0,0,0)$ innerhalb der Erbse.
- Berechne die allgemeine Form von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ in Indexschreibweise, unter der Annahme, dass \vec{B} durch das Biot-Savart Gesetz gegeben ist.
- Berechne mit dem obigen Ergebnis den Wert von $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ in der Erbse.

3. Erst Ampere und dann noch mehr

Ein unendlich langer vollzylindrischer Leiter mit Radius R wird von einer Stromdichte $\vec{j} = kr\hat{z}$ durchflossen (siehe Bild)



- Berechne das Magnetfeld im Aussenraum und im Innenraum des Leiters.

- (b) Nun wird ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$ angelegt. Welche Form müsste dieses Feld haben, damit der Leiterinnenraum zum Zeitpunkt $t = 0$ frei von einem Magnetfeld sind?
- (c) Bleibt es bei $\vec{B}(t) = 0$ für $t > 0$? Falls nein, wie verhält sich $\vec{B}(t)$? (Bonusfrage: Wie verhält sich $\rho(t)$?)

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2abc, 3a, 3bc