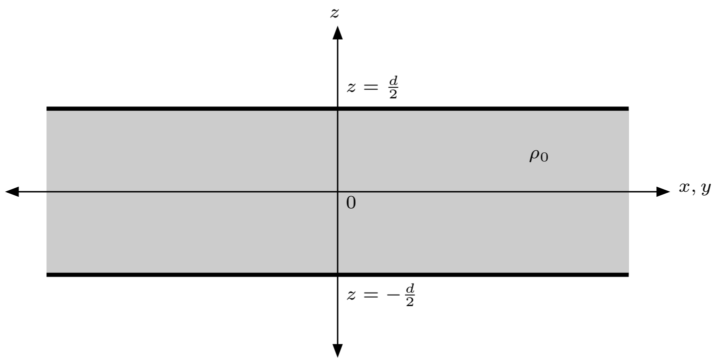
Übungsblatt 6

keine Kreuzerlübung

Diese beiden Beispiele stammen aus einem Elektrodynamik I Test der vergangenen Jahre und dienen zur Vorbereitung auf den erstem Test am 28.04.2023. Ab Seite 2 finden Sie Lösungen zu den Beispielen.

1. *(25 Punkte)* **Homogen geladene Platte**
   Gegeben sei eine (in der xy-Ebene) unendlich ausgedehnte homogen geladene Platte der Dicke d, siehe Skizze. Die Raumladungsdichte sei ρ_0.



   (a) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie Richtung und Koordinatenabhängigkeit des elektrischen Feldes mithilfe von Symmetrieüberlegungen. Skizzieren Sie die Feldlinien.

   (b) *(15 Punkte)* Berechnen Sie das elektrische Feld mithilfe der Integralform des Gauß'schen Gesetzes.

   (c) *(5 Punkte)* Innerhalb der Platte befinde sich ein kugelförmiges Loch mit Radius $a < \frac{d}{2}$ und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Berechnen Sie das elektrische Feld an einem Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ im Aussenraum der Platte.

2. (*25 Punkte*) **Potenzial zweier Punktladungen über einer Ebene**

   Oberhalb einer leitenden Ebene in der xy-Ebene, befinden sich zwei Punktladungen mit Ladung q_1 und q_2 an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Die Ebene wird auf dem Potenzial $\phi = 0$ gehalten.

   (a) (7 Punkte) Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$ mit Hilfe der Bildladungsmethode und überprüfen Sie, dass die Randbedingungen auf der Ebene erfüllt sind. Skizzieren Sie die Anordnung einschließlich der fiktiven Ladungen.

   (b) (8 Punkte) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der leitenden Ebene.

   (c) (10 Punkte) Nehmen Sie an, dass die zwei Ladungen mit einem infinitesimal dünnen, nicht leitenden Stab der Länge L verbunden sind und dass $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + L\vec{e}_z$ ist. Berechnen Sie die Kraft auf die beiden mit dem Stab verbundenen Ladungen.

Lösung des ersten Beispiels:

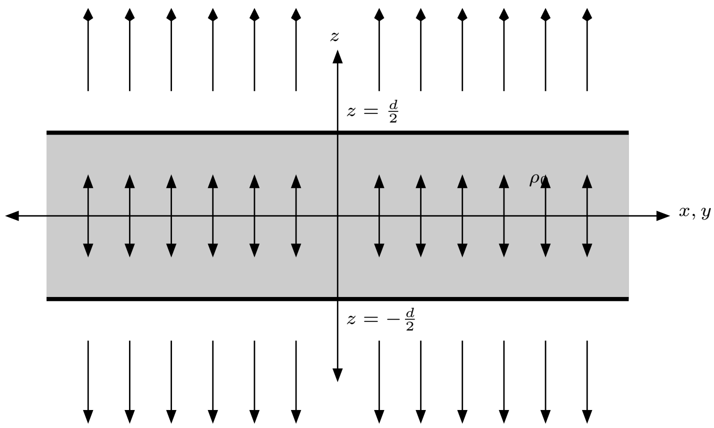
(a) Die Anordung ist symmetrisch bezüglich Verschiebungen in der xy-Ebene und invariant bezüglich Rotation um die z-Achse. Daher kann das Feld nicht von x und y abhängen und muss in z-Richtung zeigen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\vec{e}_z. \tag{1}$$

Weiters gibt es eine Spiegelsymmetrie bezüglich der xy-Ebene ($z = 0$). Daher gilt

$$z > 0: \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(z)\vec{e}_z \qquad z < 0: \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(z)(-\vec{e}_z). \tag{2}$$

Das Feld hat also den gleichen Betrag, zeigt aber in die andere Richtung. Der Verlauf der Feldlinien ist wie folgt:



(b) Das Gauß'sche Gesetz in Integralform ist

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_V dV' \rho(\vec{r}') \equiv 4\pi Q_V(\vec{r}') \tag{3}$$

Wir wählen das Integrationsvolumen so, dass der Fluss es elektrischen Feldes durch die Oberfläche konstant ist. Als Integrationsvolumen kann man daher entweder einen Quader oder einen Zylinder verwenden dessen Deckflächen parallel zu den Deckflächen der Platte liegen. Wir wählen einen Zylinder der Höhe $2z$ (die Mitte an $z = 0$ sodass die Deckflächen des Zylinders an $\pm z$ sind) mit Radius R konzentrisch zur z-Achse. Die Wahl des Volumens reflektiert insbesondere die Spiegelsymmetrie der Anordnung.

Wir beginnen mit der Berechnung des Oberflächenintegrals. Das Flächenelement $d\vec{f} = \vec{n}df$. Im Falle des Zylinders hat man einen Mantel, einen Boden und einen Deckel. Die Mantelfläche trägt nicht bei da $\vec{n} = \vec{e}_r \perp \vec{e}_z$. Auch beim Quader tragen nur die Flächen parallel zur Oberfläche der Platte bei, da die Normalvektoren der Mantelflächen $\pm\vec{e}_x \perp \vec{e}_z$ und $\pm\vec{e}_y \perp \vec{e}_z$ sind. Das Oberflächenintegral erhählt daher nur Beiträge von Boden und Deckel: $I = I_B + I_D$. Die Normalvektoren auf Boden und Deckel des Integrationsvolumens sind $-\vec{e}_z$ (Boden) und $\vec{e}_z$ (Deckel). Damit berechnen wir für den Deckel

$$I_D = \oint_D d\vec{f} \cdot \vec{E} = \oint_D E(z)\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z df = E(z) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = E(z)R^2\pi = E(z)A, \tag{4}$$

vobei A die Fläche des Deckels ist. Bei einem Quader mit Seitenängen a, b wäre das Resultat daher $I_D = E(z)ab$. Aufgrund der Spiegelsymmetrie ist der Beitrag des Bodens genau derselbe:

$$I_B = \oint_D E(z)(-\vec{e}_z) \cdot (-\vec{e}_z) df = E(z)R^2\pi. \tag{5}$$

Der Gesamtbeitrag der linken Seite ist daher (für den Zylinder)

$$I = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 2\pi R^2 E(z) = 2E(z)A. \tag{6}$$

Nun betrachten wir das Volumsintegral. Die Raumladungsdichte ist

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \theta(\frac{d}{2} - |z|) = \begin{cases} 0 & z < -\frac{d}{2} \\ \rho_0 & -\frac{d}{z} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ 0 & z > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{7}$$

Wir müssen nun eine Fallunterscheidung machen. Bei unserer spielgelsymmetrischen Anordnung müssen wir nur unterscheiden ob der Zylinder ganz innerhalb der Platte ist oder ob die Enden über die Platte hinausragen. Für $|z| \leq \frac{d}{2}$ gilt

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') = \rho_0 \int_{-z}^{z} dz' \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2zR^2\pi\rho_0 = \rho_0 V. \tag{8}$$

Im Falle des Quaders wäre das Volumen $V = 2abz$. Im Falle $|z| \geq \frac{d}{2}$ sind die Integrationsgrenzen entlang der z-Achse durch die Raumladungsdichte beschränkt:

$$\int_V dV' \rho(\vec{r}') = \rho_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz' \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = dR^2\pi\rho_0 \tag{9}$$

Im Falle des Quaders hätte man $dab\rho_0$.
Durch Vergleich von rechter und linker Seite können wir nun den Betrag des elektrischen Feldes bestimmen

$$2\pi R^2 E(z) = 4\pi\rho_0 \begin{cases} 2zR^2\pi & |z| \leq \frac{d}{2} \\ dR^2\pi & |z| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad E(z) = 4\pi\rho_0 \begin{cases} z & |z| \leq \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & |z| \geq \frac{d}{2} \end{cases} \tag{10}$$

Das elektrische Feld im gesamten Raum ist somit

$$\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho_0\vec{e}_z \begin{cases} \frac{d}{2} & z \geq \frac{d}{2} \\ z & -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} & z \leq -\frac{d}{2} \end{cases} \tag{11}$$

(c) Man verwendet das Superpositionsprinzip. Das Loch wird beschrieben durch Hinzufügen einer fiktiven “Antikugel” mit Radius a und Ladungsdichte $-\rho_0$. Das Feld im Aussenraum ist eine Superposition des Feldes der Platte im Aussenraum und des Feldes im Aussenraum der Kugel:

$$\vec{E} = \vec{E}^{aussen,Platte} + \vec{E}^{aussen,Kugel}. \tag{12}$$

Das Feld im Aussenraum einer kugelförmigen Ladungsverteilung ist dasselbe wie das Feld einer Punktladung. Mit dem Coulombgesetz ist das Feld daher

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{r^2}\vec{e}_r = \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z), \tag{13}$$

wobei $Q = -\rho_0 \frac{4\pi a^3}{3}$ und $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ der Radialabstand vom Kugelmittelpunkt ist. Das Feld ist daher (mit $\pm\frac{d}{2}$ jeweils oberhalb und unterhalb der Platte):

$$\vec{E}(x,y,z) = 4\pi\rho_0 \begin{pmatrix} -\frac{a^3}{3}\frac{x}{r^3} \\ -\frac{a^3}{3}\frac{y}{r^3} \\ \pm\frac{d}{2} - \frac{a^3}{3}\frac{z}{r^3} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Lösung des zweiten Beispiels:

(a) Spiegeln an der Ebene ändert das Vorzeichen der z-Koordinate und das Vorzeichen der Ladung:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1'|} - \frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2'|} \\ &= \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}} \\ &\quad - \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z+z_1)^2}} - \frac{q_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z+z_2)^2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Da $(z \pm z_{1/2})^2|_{z=0} = z_{1/2}^2$ folgt, dass $\phi(z=0) = 0$.

(b) Die Oberflächenladungsdichte ist definiert als

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi}E_z(x,y,0) = -\frac{1}{4\pi}(\partial_z\phi(x,y,z))|_{z=0}. \tag{16}$$

Durch differenzieren von (15) finden wir

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(x,y) &= -\frac{q_1\,z_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_2\,z_2}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad -\frac{q_1\,z_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_2\,z_2}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{2q_1\,z_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2q_2\,z_2}{((x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

(c) Wir können unser Koordinatensystem so wählen, dass $\vec{r}_1 = (0,0,z_1)^T$ ist. Damit folgt dann $\vec{r}_2 = (0,0,z_1+L)$. Die Kraft auf die mit dem Stab verbundenen Ladungen ist Summe der Kräfte der zwei Spiegelladungen auf die beiden ursprünglichen Ladungen:

$$\vec{F} = \vec{F}_{11'} + \vec{F}_{12'} + \vec{F}_{21'} + \vec{F}_{22'}, \tag{17}$$

wobei 1 und 2 die Ladungen bezeichnen und $1'$ und $2'$ die Spiegelladungen. Wegen der Symmetrie wissen wir, dass die Kraft entlang der z-Achse wirkt: $\vec{F} = F_z\vec{e}_z$. Einsetzen in die Gleichung oben ergibt:

$$F_z = \frac{q_1q_1'}{(z_1+z_1)^2} + \frac{q_1q_2'}{(z_1+z_2)^2} + \frac{q_2q_1'}{(z_1+z_2)^2} + \frac{q_2q_2'}{(z_2+z_2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{q_1^2}{4z_1^2} - \frac{2q_1q_2}{(z_1+z_2)^2} - \frac{q_2^2}{4z_2^2} \\
&= -\frac{q_1^2}{4z_1^2} - \frac{2q_1q_2}{(2z_1+L)^2} - \frac{q_2^2}{4(z_1+L)^2} \,. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Dies stimmt mit (2.46) im Buch (Band 2: Elektrodynamik) für $q_2 = 0$ überein und verschwindet für $q_2 = -q_1$ und $L = 0$.