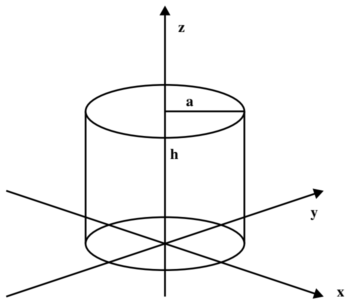
Übungsblatt 1

für das Tutorium am 08.03.2024,
Kreuzerldeadline 8:00

1. **Satz von Gauß**
   Gegeben sei ein Vektorfeld mit den kartesischen Komponenten $\vec{F}(\vec{r}) = (4x, -2y^2, z^2)$. Überprüfe die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für das Beispiel eines Zylinders, der durch die Seitenflächen $z = 0$, $z = h$ und $x^2 + y^2 = a^2$ begrenzt wird (siehe Abbildung).



   (a) Berechne $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3x$.
   Hinweis: Es gilt die Integralformel $\int_{-a}^{a} dy \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{\pi}{2} a^2$.

   (b) Berechne $\oint_{S=\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$.
   Hinweis: Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Beitrages des Zylindermantels, sowie die Integralformeln $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi = \pi$ und $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3 \varphi = 0$.

2. **Satz von Stokes**
   Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F} = (\sqrt{x^2 + y^2}, y^2, z^2)^T$ und eine Fläche S, definiert durch ein Rotationsparaboloid, definiert durch

$$z = R^2 - x^2 - y^2 \,, \qquad z \geq 0 \,, \quad R \geq 0. \tag{1}$$

   (a) Berechne $\oint_{C=\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

   (b) Berechne $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{A}$.

   Verifiziere mit diesen Ergebnissen den Satz von Stokes.

3. **Indexgymnastik** Bitte bei den Rechnungen Index-Schreibweise verwenden

   (a) Leite die Graßmann-Identität für $\vec{X} \equiv \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \ldots$ her.

(b) Berechne Divergenz und Rotation von $\vec{a}\times\vec{b}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektorfelder sind, die von $\vec{r} = x_i$ abhängen.

(c) Sei $\vec{r} = x_i$, $r = (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ und $\vec{r'} \neq \vec{r}$. Berechne den Gradient von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$.

(d) Wandle folgende Ausdrücke in äquivalente Ausdrücke in Vektorenschreibweise um. Dabei soll der Vektoroperator $\vec{\nabla}$ verwendet werden. Wo es möglich ist sollen auch div, rot, grad verwendet werden: $\epsilon_{ijk}\partial_i B_k$, $l^2 = a_i a_j \delta_{ij}$, $\epsilon_{abc}\partial_b\partial_c\phi = F$, $h = \partial_m \delta_{km} E_i \delta_{ik}$.

(e) Berechne $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\left(\frac{\vec{r}}{r}f(r)\right)$, wobei die skalare Funktion f nur von r abhängt.

Ankreuzbar: 1ab, 2a, 2b, 3ab, 3cd,3e