

5. Tutorium

für 19.04.2024

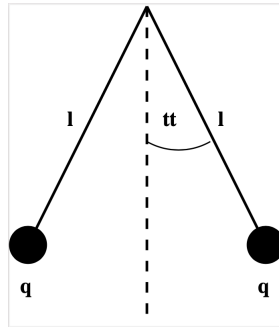
5.1 Nie zu spät für Dualität

- Betrachte die Maxwellgleichungen im Vakuum ohne äussere Quellen (in Gauß-Einheiten). Zeige, dass die Gleichungen invariant unter elektrisch-magnetischer Dualität $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ sind. Gilt die Dualität auch noch in Anwesenheit von Quellen?
- Nimm nun an, dass neben elektrischen Ladungen und Strömen (ρ_e, \vec{j}_e) auch noch magnetische Ladungen und Ströme (ρ_m, \vec{j}_m) existieren¹, die sich analog zu den elektrischen Größen verhalten. Wie sehen die Maxwellgleichungen in diesem Fall aus?
- Zeige, dass die Maxwellgleichungen mit magnetischen Quellen invariant unter einer allgemeineren Version der elektrisch-magnetischen Dualität sind, wo Felder und Quellen in Linearkombinationen derselben transformieren. Wie sehen die Transformationseigenschaften der Felder und Quellen aus? Gib die Ergebnisse im SI und im Gauß System an.
Hinweis: Es geht allgemeiner als nur der Austausch der Feldstärken: Führe eine Winkelvariable ξ ein. Dann transformiert zum Beispiel das elektrische Feld als $\vec{E}' = \vec{E} \cos \xi - \vec{B} \sin \xi$. Wie sehen die Transformationen der anderen Größen aus? Was bedeuten die Spezialfälle $\xi = 0$ und $\xi = \frac{\pi}{2}$?

5.2 Zwei Ladungen ein Coulomb

Zwei gleichartig geladene Kugeln der Masse m und Ladung q hängen wie abgebildet an masselosen Fäden der Länge l im Schwerfeld der Erde.

¹Magnetische Monopole sind in der Natur noch nicht beobachtet worden. Sie spielen jedoch in Theorien jenseits des Standardmodells der Teilchenphysik, z.B. in der Stringtheorie, eine wichtige Rolle.



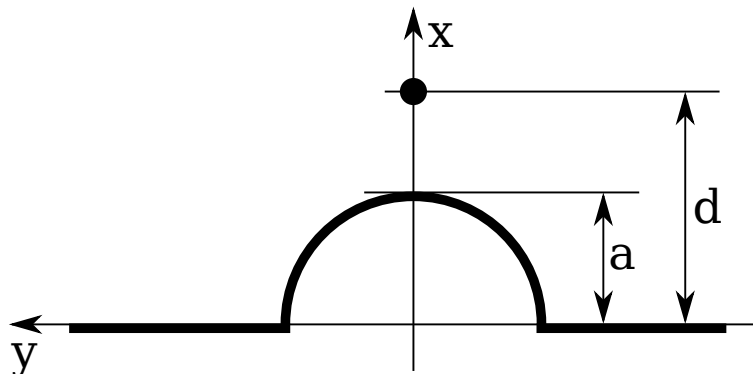
- Berechne den Ablenkungswinkel θ als Funktion von q, g, l . Verwende eine Näherung für kleine Auslenkungen.
- Die Anordnung kann zur Ladungsmessung benutzt werden. Wie groß ist die Ladung q für die Werte $l = 15\text{cm}$, $m = 1\text{g}$ und $\theta = 7^\circ$?
- Nun wird die linke der beiden Massen halbiert ($m_1 = m/2$ und $m_2 = m$). Welche Ladungen q_1 und q_2 müssen auf die Kugeln verteilt werden, damit die Winkel der beiden Massen relativ zum Lot gleich sind $\theta_1 = \theta_2$. Was für ein Winkel muss das sein?

5.3 Zylindermantelförmige Ausbuchtung auf leitender Ebene

Eine Leiterebene hat eine zylindermantelförmige Ausbuchtung, wobei der Querschnitt des Zylinders ein Halbkreis vom Radius a ist. Ein unendlich langer unendlich dünner geladener Stab mit der Ladung τ pro Längeneinheit befindet sich gegenüber der Ausbuchtung im Abstand $d > a$ von der Ebene. Der Leiter befindet sich auf dem Potential $\phi = 0$.

- Berechne das Potential im Raum oberhalb der leitenden Oberfläche mit Hilfe der Bildladungsmethode, und überprüfe, dass das Potential überall auf der Leiteroberfläche verschwindet und auch asymptotisch regulär ist. Hinweis: es empfiehlt sich insgesamt drei Bildladungsstäbe einzuführen, hierbei jedoch die Spiegelsymmetrie bezüglich der x -Achse und der y -Achse zu berücksichtigen.
- Berechne die auf der Ausbuchtung A und der Leiterebene E influenzierenden Flächenladungsverteilungen $\sigma_A(\varphi)$ und $\sigma_E(y)$ sowie die zugehörigen Gesamtladungen pro Längeneinheit in z -Richtung und deren Summe.

Hinweis zum Integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 \pm A \cos \varphi} = \frac{\frac{\pi}{2} \mp \arcsin A}{\sqrt{1-A^2}}$ für $0 < A < 1$.
 Weiterer Hinweis: $\arcsin A = \arctan \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$.



5.4 Geladene Kugel

Berechne das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Ladungsdichte ρ_0 . Nutze hierzu die Symmetrie des Systems aus.

- Finde ein Probevolumen, auf dessen Oberfläche der Wert von $\vec{n} \cdot \vec{E}$ konstant ist.
- Verwende das Gaußsche Gesetz in Integralform zur Berechnung des elektrischen Feldes.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2abc, 3a, 3b, 4ab (jeweils 1 Punkt)