2. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 17.10.2008

1. Beantworten Sie folgende Fragen aus der Atomphysik:

   (a) Die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms (im Grundzustand) liegt bei $E_{\text{ion}} = 13.6\text{eV}$. Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung die in diesem Fall für die Ionisierung mindestens benötigt wird. Um welche Art von Strahlung handelt es sich dabei?

   (b) In der Nähe des Atomkerns kann die Energie eines Photons in ein Elektron-Positron-Paar konvertiert werden. Berechnen Sie die minimale Energie des Photons (in MeV) die für diesen Prozess vonnöten ist. Berechnen Sie wiederum Frequenz und Wellenlänge der entsprechenden elektromagnetischen Strahlung.

   (c) Ein He-Ne-Laser emittiert monochromes Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 633\text{nm}$. Wieviele Photonen werden von dem Laser pro Sekunde emittiert, wenn dieser eine Leistung von 1mW hat?

2. Ein freies Teilchen der Masse m bewege sich auf einem eindimensionalen Stab der Länge L. Die Dynamik des Teilchens ist bestimmt durch folgende Schrödingergleichung,

$$H_0\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\,, \quad \text{mit} \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,. \tag{1}$$

   (a) Berechnen Sie die stationären Zustände für dieses System (gegeben durch $\phi_n(x)\exp[-iE_nt/\hbar]$) unter Annahme von periodischen Randbedingungen an den beiden Enden des Stabes ($x = 0, L$). Geben Sie den Randbedingungen physikalischen Sinn.

   (b) Wievielfach sind die einzelnen Energieeigenwerte E_n entartet? (Der Grad der Entartung M des Eigenwertes E_n ist gegeben durch die Anzahl von zueinander linear unabhängigen Eigenvektoren $[\phi_n(x)]_i$, die demselben Eigenwert E_n zugeordnet sind.)

   (c) Zeigen Sie explizit dass jeder Zustand der Form,

$$\tilde{\phi}_n(x) = \sum_{i=1}^{M} c_{n,i}[\phi_n(x)]_i\,, \tag{2}$$

Eigenzustand zu H_0 ist, unabhängig von den komplexen Koeffizienten $c_{n,i}$.

(d) Skizzieren Sie die Dispersionsrelation des Systems.

3. Untersuchen Sie in diesem Beispiel wie sich die Wellenfunktion $\psi(x)$ an einer Diskontinuität des Potentials $V(x)$ verhält. Betrachten Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung in einer Dimension:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)\,. \tag{3}$$

Die zu untersuchenden Potentiale $V(x)$ besitzen eine Diskontinuität an der Stelle x_0:

(a) Potentialstufe: $V(x) = V_0\,\Theta(x - x_0), \quad V_0 \in \mathbb{R}\,.$

(b) Delta-Funktion: $V(x) = D\,\delta(x - x_0), \quad D \in \mathbb{R}\,.$

Untersuchen Sie für diese beiden Fälle, ob die Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle x_0 stetig bzw. stetig differenzierbar bleibt. Skizzieren Sie den Verlauf von $\psi(x)$ in der Umgebung von x_0. Was passiert im Fall (a) wenn $V_0 \to \infty$?

Hinweis: Lösen Sie das Problem, indem Sie die Schrödingergleichung in Eq. (3) räumlich aufintegrieren.