3. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 24.10.2008

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m das durch zwei Delta-Funktionen gebunden wird,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x+a) - \frac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x-a), \quad D > 0,\, a > 0\,. \tag{1}$$

   (a) Gehen Sie davon aus, dass durch die Symmetrie des Potentials $V(x)$ die gebundenen Wellenfunktionen gerade bzw. ungerade sein müssen. Bestimmen Sie die Bedingungen für die Existenz (i) der geraden und (ii) der ungeraden Zustände. Verwenden Sie für die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion an den Stellen $x = \pm a$ jene aus den Ergebnissen von Bsp. 3 der vorigen Woche.

   (b) Zeigen Sie durch graphisches Lösen der Eigenwertbedingungen aus (a), dass es immer mindestens einen gebundenen Zustand gibt. Unter welchen Bedingungen gibt es (i) zwei oder (ii) mehr als zwei gebundene Zustände?

   (c) Sizzieren Sie den Verlauf der gebundenen Zustände für verschiedene Werte von a.

   (d) Diskutieren Sie die Ergebnisse dieses Beispiels im Kontext von kovalenter Bindung eines zweiatomigen Moleküls.

2. Ein Teilchen der Masse m befinde sich in folgendem Potential:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x-a) + W(x) \quad \text{mit} \quad W(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases} \tag{2}$$

   Die reellen Konstanten D, a, V_0 sind als positiv zu wählen.

   (a) Skizzieren Sie zuerst den Verlauf des Potentials und ermitteln Sie den Energiebereich in dem gebundene Zustände existieren können.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwertbedingungen für die gebundenen (stationären) Zustände. Die Anschlussbedingung für die Wellenfunktion an der Stelle $x = a$ kann den Ergebnissen aus Bsp. 3 der vorigen Woche entnommen werden.

(c) Diskutieren Sie Ihre Lösungen anhand einer graphischen Darstellung der Eigenwertbedingungen. Untersuchen Sie wie sich die Eigenenergien als Funktion von D, a, V_0 verschieben.

(d) Skizzieren Sie den Verlauf der Eigenfunktionen.

3. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x)$. Es soll gezeigt werden, dass für beliebige Potentiale $V(x)$ die gebundenen (stationären) Zustände des Teilchens nicht entartet sein können: Zu jeder Eigenenergie E_n existiert nur genau ein einziger linear unabhängiger Eigenzustand $\phi_n(x)$ (sh. Definition von Entartung aus Bsp. 2 der vorigen Woche).

   Gehen Sie zu Beginn Ihrer Beweisführung davon aus, dass Sie zwei Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ zum selben Eigenwert E_n besitzen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,[\phi_n''(x)]_i + V(x)\,[\phi_n(x)]_i = E_n[\phi_n(x)]_i \quad \text{mit} \quad i = 1,\,2\,. \tag{3}$$

   Zeigen Sie, dass Sie davon ausgehend zu folgender Beziehung gelangen können:

$$[\phi_n(x)]_2\,[\phi_n'(x)]_1 - [\phi_n(x)]_1\,[\phi_n'(x)]_2 = C\,. \tag{4}$$

   Um den gesuchten Beweis zu erbringen, bestimmen Sie zuerst die Konstante C und zeigen Sie anhand von Gl. (4), dass die beiden Eigenfunktionen $[\phi_n(x)]_1$, $[\phi_n(x)]_2$ voneinander linear abhängig sind.

   Diskutieren Sie wieso obiger Beweis offenbar für Bsp. 2 der vorigen Woche nicht anwendbar ist.

   Hinweis: Für einen gebundenen Zustand gilt, dass seine Wellenfunktion $\phi_n(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.