5. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 7.11.2008

1. Wie groß ist die de-Broglie Wellenlänge der folgenden Objekte?
   (a) Ein Auto (2000kg), das sich mit 50 km/h bewegt.
   (b) Ein Staubteilchen mit Radius 1μm und Dichte 200kg/m^3 das bei Raumtemperatur durch Luftmoleküle hin- und hergestoßen wird.
   (c) Ein Atom ^{87}Rb, das durch Laser-Kühlung auf eine Temperatur von $T = 100\mu K$ gebracht wurde?

2. Gegeben seien die Energieeigenfunktionen des eindimensionalen Potentialtopfs (unendlich tief) im Bereich $x \in [0, L]$,
$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n\, x) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}\,. \tag{1}$$
   (a) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte des Ortes x und des Impulses p für die n-te Eigenfunktion: $\langle\phi_n|x|\phi_n\rangle$, $\langle\phi_n|x^2|\phi_n\rangle$, $\langle\phi_n|p|\phi_n\rangle$, $\langle\phi_n|p^2|\phi_n\rangle$.
   (b) Ermitteln Sie das Unschärfeprodukt $\Delta x \cdot \Delta p$ für die n-te Eigenfunktion und überprüfen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.
   (c) Wie Sie bereits wissen, ist die Energie für die stationären Zustände $\phi_n(x)$ genau (scharf) definiert ($\Delta E = 0$). Nachdem die Energie rein kinetisch ist, könnte man argumentieren, dass somit auch der Impuls scharf definiert sein muss ($\Delta p = 0$). Wieso ist dieses Argument offenbar falsch?
   (d) Nehmen Sie an, dass Sie viele identische Potentialtöpfe vor sich haben in denen das Teilchen immer im Zustand $\phi_n(x)$ präpariert ist (n ist gleich für alle Potentialtöpfe). An jedem einzelnen der Potentialtöpfe werde nun jeweils eine Ortsmessung durchgeführt. Welche Messwerte erhalten Sie bei Ihren Messungen (i) im Mittel bzw. (ii) am häufigsten?

3. Betrachten Sie die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion im unendlich tiefen Potentialtopf (gleiches Potential wie in Bsp. 2). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion gegeben durch ($k_n = n\pi/L$)
$$\psi(x, t = 0) = C\ [2\sin(k_1 x) + 3\sin(k_2 x) + \sin(k_3 x)]\ . \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C.

(b) Entwickeln Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Basis der Eigenzustände $\phi_n(x)$ und berechnen Sie darauf aufbauend die Zeitentwicklung von $\psi(x, t)$ für alle Zeiten t. Plotten Sie die Zeitentwicklung von $|\psi(x, t)|^2$ für verschiedene Werte von t mit dem Computer. (Mit Mathematica oder Matlab können Sie die Zeitenwicklung auch als Kurzfilm animieren, wie z.B. unter: http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/en/index.html)

(c) Ist die zeitliche Entwicklung von $\psi(x, t)$ periodisch? Gibt es eine Zeit T zu der gilt: $\psi(x, T) = \psi(x, 0)$?

(d) Nehmen Sie an, dass eine Energiemessung an dem durch die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschriebenen Teilchen durchgeführt wird. Welche Messwerte können Sie erhalten bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese Werte gemessen?

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert (i.e. den Mittelwert) der Energie für das Teilchen. Verändert sich dieser Wert mit der Zeit, wenn keine Messung durchgeführt wird?

(f) Ändert sich die Energie des Teilchens wenn eine Messung durchgeführt wird? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis im Kontext der Erhaltung von Energie.

(g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t = 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Hängt Ihr Ergebnis von einer globalen Phase ab, die Sie für die Normierungskonstante C wählen können? Warum bzw. warum nicht? Ändert sich der Wert von $j(x, t)$ für spätere Zeiten $t > 0$? Welche Bedingungen erfüllt $j(x, t)$ die sicherstellen, dass das Teilchen nicht aus dem Potentialtopf hinausläuft?