6. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 14.11.2008

1. (a) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen für die Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ und $\hat{C}$:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]_+ \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]_+ &= [\hat{A}, \hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]_+ \end{aligned}$$

   Hinweis: Für den Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ bzw. für den Antikommutator $[\hat{A}, \hat{B}]_+ \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

   (b) Beweisen Sie unter Verwendung der Beziehungen in (a), dass gilt:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = c \cdot n\hat{B}^{n-1}\,,\; n \in \mathbb{N}\,,$$

   wenn $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = c \in \mathbb{C}$. Was ergibt sich daraus für die Kommutatoren $\left[\hat{P}^n, \hat{X}\right]$ und $\left[\hat{X}^n, \hat{P}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}$, wenn gilt $\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar$?

   Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis die Methode der vollständigen Induktion.

2. Gegeben sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbertraum, für den eine Basis durch zwei orthonormierte Vektoren $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ gegeben ist (Basis der $\{a\}$-Darstellung). Eine weitere Basis des Hilbertraums sei durch folgende Vektoren,

$$|b_1\rangle = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,|a_1\rangle - i\,|a_2\rangle\right)\,, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|a_1\rangle + i\sqrt{3}\,|a_2\rangle\right)\,, \qquad (1)$$

   definiert (Basis der $\{b\}$-Darstellung).

   (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden.

   (b) Welche Matrizen sind den Ketvektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

   (c) Welche Matrizen sind den Bravektoren $\langle b_1|$, $\langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

   (d) Wie schreiben sich die inneren Produkte $\langle b_1|b_1\rangle$, $\langle b_1|b_2\rangle$, $\langle b_2|b_2\rangle$ als Matrizenprodukte?

(e) Drücken Sie den unitären Operator $\hat{U}$, der den Basiswechsel $|b_i\rangle = \hat{U}|a_i\rangle$ vermittelt durch die Vektoren $|a_i\rangle$, $|b_j\rangle$ aus. Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

(f) Ein Ketvektor $|\chi\rangle$ und ein linearer Operator $\hat{T}$ seien in der $\{a\}$-Darstellung durch folgende Matrizen gegeben:

$$\chi^{\{a\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T^{\{a\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Wie lauten die entsprechenden Matrizen von $|\chi\rangle$ und $\hat{T}$ in der $\{b\}$-Darstellung?

3. Ein Teilchen der Masse m sei im Grundzustand des unendlich tiefen Potentialtopfs präpariert ($x \in [0, L]$). Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird nun die rechte Wand des Potentialtopfs bei $x = L$ plötzlich zur Position $x = 2L$ verschoben. Durch die Plötzlichkeit dieser Bewegung kann angenommen werden, dass die Wellenfunktion nach Verschiebung der Wand gleich ist wie davor ("sudden approximation").

   (a) Wie schnell muss die Wand tatsächlich verschoben werden, damit obige Annahme gültig bleibt? (Eine qualitative Antwort mit physikalischer Begründung ist hier ausreichend. $\Delta t = 0$ gilt nicht!)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen unmittelbar nach der Wandverschiebung im ersten angeregten Zustand des breiten Potentialtopfs zu finden? (Beachten Sie die Energien und Normierungen der jeweiligen Zustände.)

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Grundzustand des breiten Potentialtopfs zu finden?

   (d) Wie groß ist der Erwartungswert der Energie des Teilchens vor und nach der Ausdehnung?

   (e) Wie sollte die Zeitskala für die Ausdehnung des Potentialtopfs aussehen, wenn Sie sicherstellen wollen, dass das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Grundzustand des breiten Potentialtopfs übergeht? (Qualitative Antwort mit Begründung ausreichend.)