7. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 21.11.2008

1. In einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei durch $\hat{T} := |v\rangle\langle w|$ ein linearer Operator definiert ($|v\rangle$, $|w\rangle$ sind vorgegebene Vektoren des Hilbertraums $\mathcal{H}$). Zeigen Sie dass die Spur des Operators $\hat{T}$ durch das Skalarprodukt $\langle w|v\rangle$ gegeben ist.

2. Ein Teilchen sei durch einen gebundenen Zustand $|\psi\rangle$ beschrieben (stationäres Problem in einer Dimension). Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse des 3. Plenumsbeispiels ($\langle x|\psi\rangle \in \mathbb{R}$), dass für dieses Teilchen folgende Aussagen gelten:

   (a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Impulsmessung $|\tilde{\psi}(p)|^2$ ist nicht vom Vorzeichen des Impulses abhängig: $|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{\psi}(-p)|^2$.

   (b) Der Erwartungswert des Teilchenimpulses $\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle$ ist null. (Wie lässt sich dieses Ergebnis physikalisch begründen? Wieso ist Ihr Beweis für Bsp. 2 des 2. Tutoriums im Allgemeinen nicht gültig?)

3. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien zwei lineare Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert (a, $b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \hat{A}|e_1\rangle &= a|e_1\rangle & \hat{B}|e_1\rangle &= b|e_1\rangle \\ \hat{A}|e_2\rangle &= -a|e_2\rangle & \hat{B}|e_2\rangle &= ib|e_3\rangle \\ \hat{A}|e_3\rangle &= -a|e_3\rangle & \hat{B}|e_3\rangle &= -ib|e_2\rangle \end{aligned}$$

   (a) Berechnen Sie die Matrizen $A^{\{e\}}$ und $B^{\{e\}}$, welche den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ zugeordnet sind.

   (b) Können den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ physikalische Observable zugeordnet werden (prinzipiell)? Wenn ja, können die beiden Observablen gleichzeitig scharf gemessen werden?

   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$, deren Entartungsgrad, sowie ein Orthonormalsystem $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ gemeinsamer Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

   (d) Welche Matrizen $A^{\{g\}}$ und $B^{\{g\}}$ sind den beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ zugeordnet? Überprüfen Sie für Ihre Matrizen, ob die Invarianz der Spurbildung unter Basistransformationen erfüllt ist (sh. Punkt (a) und Bsp. 1).

(e) Schreiben Sie die Spektraldarstellungen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ an.

(f) Existieren die inversen Operatoren $\hat{A}^{-1}$ und $\hat{B}^{-1}$? Falls ja, geben Sie deren Wirkung auf die Basisvektoren $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ an. (*Hinweis:* Verwenden Sie zur Inversion die Spektraldarstellungen.)