

## 9. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 12.12.2008

1. Ein Teilchen der Masse  $m$  befinde sich im harmonischen Oszillatorpotential  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ . Konstruieren Sie einen normierten Zustand als Linearkombination aus dem Grundzustand  $|0\rangle$  und dem ersten angeregten Zustand  $|1\rangle$ ,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

sodass der Erwartungswert  $\langle x \rangle$  im Zustand  $|\psi\rangle$  maximal wird. Motivieren Sie Ihr Ergebnis anhand der entsprechenden Ortsdarstellungen der Wellenfunktionen.

*Hinweis:* Betrachten Sie separat die Beträge und die relative Phase der komplexen Konstanten  $\alpha, \beta$ .

2. Gegeben sei eine selbstadjungierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

und eine reelle Konstante  $\lambda$ . Berechnen Sie die Exponentialfunktion  $T(\lambda) := \exp(i\lambda A)$ :

- (a) durch eine Taylorreihenentwicklung.
- (b) durch Verwendung der Spektraldarstellung von  $A$ .

*Bemerkung:* Die Exponentialfunktion einer Matrix bzw. eines Operators kommt in der Quantenmechanik sehr häufig vor. Ein "kohärenter Zustand" des harmonischen Oszillators mit der Eigenschaft  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  kann so z.B. geschrieben werden als  $|\alpha\rangle = C \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle$ .

3. Betrachten Sie das im Pariser Panthéon angebrachte Foucaultsche Pendel. Dieses besteht aus einer Masse  $m = 28\text{kg}$  die an einem (masselosen) Draht der Länge  $l = 67\text{m}$  angebracht ist (sh. Abbildung 1). In der Schwingungsebene des Pendels führt die Masse Oszillationen mit einer Maximalamplitude von  $x_{\text{max}} = 3\text{m}$  durch (ohne Reibung).
  - (a) Zeigen Sie wie die klassische Kreisfrequenz  $\omega$  des Pendels mit der Drahtlänge  $l$  und der Fallbeschleunigung  $g$  zusammenhängt (unter der Voraussetzung von kleinen Schwingungsamplituden).

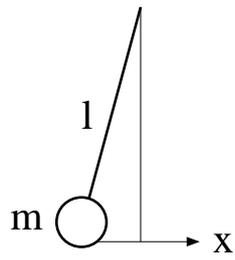


Abbildung 1: Klassisches Pendel.

- (b) Welcher quantenmechanische Zustand beschreibt die klassische Pendelbewegung am genauesten? Passen Sie den entsprechenden Zustand an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  an:  
 $x(t)$