10. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 19.12.2008

1. Betrachten Sie die normierten Eigenzustände $|l, m\rangle$ der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ mit $l = 1$ und $m = -1, 0, 1$. (Es gilt $\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l + 1) |l, m\rangle$ und $\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$.)

   (a) Verwenden Sie die Leiteroperatoren $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$, um die Wirkung von $\hat{L}_x$ auf die Zustände $|l, m\rangle$ zu berechnen.

   (b) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände und Eigenwerte von $\hat{L}_x$, indem Sie die gesuchten Eigenzustände in der Basis der $|l, m\rangle$ allgemein ausdrücken und das Eigenwertproblem algebraisch lösen (ohne Kugelflächenfunktionen). Nachdem keine Achse des Raumes gegenüber einer anderen ausgezeichnet ist, sollten Sie für $\hat{L}_x$ dieselben Eigenwerte bekommen wie für $\hat{L}_z$.

2. Der Drehimpuls eines Teilchens sei durch folgende Superposition von zwei normierten Drehimpuls–Eigenzuständen $|l, m\rangle$ festgelegt:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|3, 2\rangle - |3, -1\rangle \right) .$$

   (a) Ermitteln Sie die Erwartungswerte von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ im Zustand $|\psi\rangle$. Überlegen Sie, wie Sie Ihre Ergebnisse ohne explizite Rechnung erlangen können.

   (b) Berechnen Sie für den Zustand $|\psi\rangle$ den Erwartungswert der y–Komponente des Bahndrehimpulses indem Sie $\hat{L}_y$ durch die Leiteroperatoren $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ darstellen.

3. (a) Leiten Sie ausgehend von den Grundbeziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta ,$$

   die Darstellung des Operators $\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten her.

   (b) Wenden Sie den gefundenen Ausdruck für $\hat{L}_z$ auf Beispiel 2 des 2. Tutoriums an. Stellen Sie sich dazu vor, dass der dort diskutierte Stab mit "periodischen Randbedingungen" in Form eines Kreisrings mit Radius $R = 1$ realisiert ist, der in der xy–Ebene liegt (Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung). Wie können Sie in diesem Fall den Hamiltonoperator der freien Bewegung $\hat{H}_0$ und die Energieeigenfunktionen ϕ_n auf dem Ring durch die Winkelkoordinate φ ausdrücken? Kommutieren die Operatoren $\hat{H}_0$ und $\hat{L}_z$? Wie sieht das vollständige Orthonormalsystem gemeinamer Eigenvektoren von $\hat{H}_0$ und $\hat{L}_z$ in der φ-Darstellung aus? Bildet hier $\hat{L}_z$ schon für sich allein (also ohne $\hat{H}_0$) einen "vollständigen Satz vertauschbarer Operatoren"?