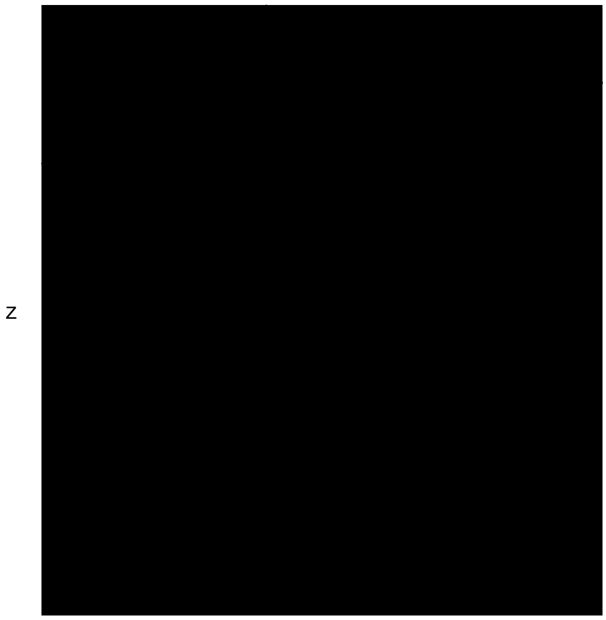
11. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 16.1.2009

1. Gegeben sei ein Teilchem im $\mathbb{R}^3$, das durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{N}\,(x+y+z)\,\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}, \quad a, N \in \mathbb{R}$$

beschrieben wird. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\vec{L}^2$ und L_z auf? Stellen Sie dazu die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x,y,z)$ (sh. Abbildung 1) mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar (für eine entsprechende Auflistung sh. z.B. das Übungsbuch von Herrn Dr. Grau).



2. Gegeben sei ein dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator. Zeigen Sie explizit dass der entsprechende Hamiltonoperator,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\mathsf{x}^2 + \hat{p}_\mathsf{y}^2 + \hat{p}_\mathsf{z}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2\right) ,$$

mit den kartesischen Komponenten $\hat{L}_\mathsf{x}$, $\hat{L}_\mathsf{y}$, $\hat{L}_\mathsf{z}$ des Bahndrehimpulsoperators vertauscht. Welche Schlussfolgerungen können Sie aus diesem Ergebnis ziehen, wenn Sie planen an einem Oszillatorzustand eine Messung der Energie E und von L_z durchzuführen?

3. Wie lässt sich der Drehimpulsoperator $\hat{L}_{\mathsf{z}'}$ bezüglich einer beliebigen Achse z' als Funktion der bekannten Operatoren $\hat{L}_\mathsf{x}$, $\hat{L}_\mathsf{y}$, $\hat{L}_\mathsf{z}$ ausdrücken? Verwenden Sie dazu die jeweiligen Winkel, die die Achse z' mit den Achsen x, y, z einschließt.

   Wenden Sie Ihr Ergebnis für $\hat{L}_{\mathsf{z}'}$ nun auf einen Zustand $|\psi\rangle$ an, welcher Eigenzustand von $\hat{L}_\mathsf{z}$ ist: $\hat{L}_\mathsf{z}|\psi\rangle = m|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass Sie bei einer Messung der Observable $L_{\mathsf{z}'}$ im Mittel den Messwert $m\cos\vartheta$ erhalten, wenn die Achse z' einen Winkel ϑ mit der z-Achse einschließt. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen "Vektormodells" für den Drehimpuls (sh. Plenumsfolie 148).

Alles Gute für das neue Jahr 2009!