

12. Tutorium - VU Quantentheorie 1 - 23.1.2009 (Letztes Tutorium der VU)

Betrachten Sie das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{N} \left[-2 \phi_{100}(\vec{r}) + 4 \phi_{200}(\vec{r}) + \sqrt{10} \phi_{210}(\vec{r}) + \right. \\ \left. - i \phi_{2,1,-1}(\vec{r}) + (1 + 2i) \phi_{3,2,-1}(\vec{r}) \right]$$

gegeben ist [$\phi_{nlm}(\vec{r})$: normierte Energieeigenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom].

Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0 (ohne Berücksichtigung des Spins):

- (a) die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie den Wert E_1 oder E_3 zu erhalten, wobei

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2 m a_0^2} \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (b) die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung des Drehimpulsquadrats den Messwert $l(l+1)\hbar^2$ mit $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.
 (c) den Erwartungswert der z -Komponente des Drehimpulses.
 (d) die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung des Messgrößenpaars $\{ \text{Energie, Drehimpulsquadrat} \}$ das Messwertepaar

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{8 m a_0^2}, 2 \hbar^2 \right\}$$

zu finden. hängt das Ergebnis davon ab, ob zuerst die Energie und unmittelbar darauf das Drehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?

Was erhält man für die unter (a) bis (d) gefragten Größen, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0 , sondern $t > t_0$ gewählt wird?

2. Betrachten Sie eine Elektronenwasserstoffatom, dessen Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_{100}(\vec{r}) + \phi_{211}(\vec{r})]$$

gegeben ist. Für die $\phi_{nlm}(\vec{r})$ gilt dieselbe Notation wie in sp. 1.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Dipoloperators $\vec{D} = q\vec{r}$ im Zustand $\psi(\vec{r})$ für alle Zeiten $t > t_0$ (q : Ladung). Welche Bedeutung beschreibt Ihr Ergebnis? Ist der Dipoloperator ein polarer Vektor oder ein axialer Vektoroperator? (Hinweis: Berechnen Sie den Erwartungswert von jeder kartesischen Komponente von \vec{D} einzeln, das Radialintegral $\int_0^\infty R_{2,1}(r)R_{1,0}(r)r^3 dr$ kann dabei unbestimmt bleiben.)
- (b) Wie Sie aus der Elektrodynamik bereits wissen (sollten), sendet ein oszillierender Dipol elektromagnetische Strahlung aus. Nehmen Sie nun an, dass die Strahlung die von dem Atom während eines Übergangs vom Zustand $|\phi_{211}\rangle$ in den Grundzustand $|\phi_{100}\rangle$ ausgesandt wird, der eines klassischen Dipols mit dem oben ermittelten Wert $\langle \psi(\vec{r}, t) | \vec{D} | \psi(\vec{r}, t) \rangle$ entspricht. Wie ist die emittierte Strahlung polarisiert (linear, zirkulär, elliptisch), wenn sie in (i) in x -Richtung, (ii) in z -Richtung, (iii) in eine beliebige Ausrichtung ausgesandt wird? (Antwort ohne Rechnung.)

3. Ein Spin $s = 1/2$ befindet sich im Zustand

$$|\chi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |+\rangle + \frac{i}{2} |-\rangle,$$

wobei $|+\rangle, |-\rangle$ die Eigenzustände von S_z zu den Eigenwerten $\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ sind.

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Unschärfe von S_y .
- (b) Entlang welcher Ausrichtung müssen Sie den Spin des Zustands $|\chi\rangle$ messen um mit Wahrscheinlichkeit 1 den Messwert $\hbar/2$ zu bekommen? Skizzieren Sie eine Skizze der entsprechenden Messapparatur (à la Stern-Gerlach) an. (Hinweis: Verwenden Sie Ihre Kenntnisse aus sp. 3 der vorigen Woche.)