1. Tutorium - Quantentheorie I - 9.10.2009

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 1 & -2i \\ 2 & 2i & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Ist A selbstadjungiert (=hermitesch)? Ist A unitär? Welche Eigenschaften erfüllen Eigenwerte und Eigenvektoren hermitescher (unitärer) Matrizen?
   (b) Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die normierten Eigenvektoren von A.
   (c) Berechnen Sie das Produkt von A mit den Vektoren
$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ i \end{pmatrix}.$$
   Warum sind alle Ergebnisse proportional zum Vektor $(1 \quad -i \quad 2)$? Gilt das für alle Vektoren, die mit A multipliziert werden? Warum (nicht) ?
   (d) Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Operators $U(t) = e^{iA}$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von U. Ist U hermitesch oder unitär?

2. Betrachten Sie die Schwingungen einer eingespannten Saite,
$$\partial_x^2 u(x,t) = \frac{1}{v^2}\partial_t^2 u(x,t), \quad v \in \mathbb{R}$$
   unter der Randbedingung $u(0,t) = u(a,t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$.
   (a) Führen Sie einen Separationsansatz durch, und stellen Sie eine zeitunabhängige Schwingungsgleichung $Av(x) = \omega^2 v(x)$, mit Separationskonstante ω und geeignet gewähltem Operator A auf.
   (b) Lösen Sie die zeitunabhängige Schwingungsgleichung unter den obigen Randbedingungen. Welche Werte ω_n sind möglich?
   (c) Berechnen Sie das Skalarprodukt
$$\int_0^a v_n^*(x) v_m(x) \mathrm{d}x, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$
   (d) Die zeitunabhängige Schwingungsgleichung kann man auch als Eigenwertproblem $Av = \omega^2 v$ des Differenzialoperators A interpretieren. Zeigen Sie, dass A ein linearer Operator ist. Ist A selbstadjungiert? Geben Sie die Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen an. Erklärt sich somit das Ergebnis von b für $n \neq m$?

Zu kreuzen: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd