2. Tutorium - Quantentheorie I - 16.10.2009

1. Betrachten Sie ein gebundenes Teilchen im anziehenden Delta-Potential,

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 - A\delta(x)\right]\psi(x) = E\psi(x), \quad A \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

   (a) Leiten Sie die Übergangsbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion an $x = 0$ ab.

   (b) Machen Sie einen Ansatz für die Lösung des Problems. Stellen Sie die Übergangsbedingungen auf.

   (c) Skizzieren Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes. Gibt es einen ersten angeregten Zustand? Warum (nicht)?

   (d) Für welche Werte A gibt es einen gebundenen Zustand? Berechnen Sie die Grundzustandsenergie, und die normierte Grundzustandswellenfunktion.

   (e) Im Plenum wurde die Energie eines Teilchens im endlich breiten (Breite a) und tiefen (Tiefe V_0) Potentialtopf hergeleitet [siehe z.B. Skriptum Gl. (2.69)]. Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis im Limes $a \to 0$, $V_0 \to \infty$, $aV_0 = \text{const}$ in Ihr Ergebnis für das anziehende Delta-Potential übergeht. Wie hängt die Stärke A der Deltafunktion mit V_0 und a zusammen?

2. Ein Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einer Falle der Länge und Breite d (zwei-dimensionales Problem, $d, V_0 \in \mathbb{R}^+$),

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + V(x) + V(y)\right]\psi = E\psi, \quad V(\xi) = \begin{cases} \infty & \xi < 0 \\ -V_0 & 0 < \xi < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Machen Sie einen Ansatz für die zeitunabhängige Lösung des Problems. Nutzen Sie die Separation in x und y Koordinaten. Stellen Sie die Übergangsbedingungen auf.

   (b) Geben Sie eine implizite Gleichung für die Eigenenergien des Hamiltonoperators an.

   (c) Bestimmen Sie graphisch die Eigenenergien des Systems. Geben Sie eine Bedingung für die Existenz gebundener Zustände an. Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion in den niedrigsten drei Energieniveaus (keine Rechnung).

   (d) Geben Sie die Entartung der niedrigsten drei Energieniveaus an.

   (e) Wie verschieben sich die Energieeigenwerte als Funktion von V_0? Begründen Sie die Ähnlichkeit der Resultate mit den Lösungen des eindimensionalen, im Plenum durchgerechneten Potentialtopfes.

Zu kreuzen: 1abc, 1de, 2ab, 2c, 2de