

3. Tutorium - Quantentheorie I - 23.10.2009

1. Wellenlängen, Wellenpakete

- (a) Ein Gas ultra-kalter ${}^7\text{Li}$ Atome hat eine Temperatur von 80nK ¹. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die de Broglie Wellenlänge der Atome. Vergleichen Sie die beiden Werte mit der Geschwindigkeit und der Wellenlänge bei Raumtemperatur (293K).
- (b) Zum Nachweis der Welleneigenschaft von Makromolekülen wählt ein Wissenschaftler ${}^{60}\text{C}$ Fullerene ("Fußball-ähnliche" Moleküle aus 60 Kohlenstoffatomen). Die Fullerene entweichen aus einem Ofen, werden kollimiert und haben dann eine Geschwindigkeit von 200 m/s , mit der sie sich auf einen einfachen Spalt hinbewegen. Wie groß muss der Spalt sein, damit die ersten Beugungsminima einen Winkel von $\theta = \pm 25\mu\text{rad}$ haben (Hinweis: Fraunhofer Beugung)?² Überlegen Sie, warum die Beugung am einfachen Spalt mit wachsender Größe der Moleküle zum Scheitern verurteilt ist (und man deswegen ausgeklügeltere Beugungsinstrumente verwenden muss)³.
- (c) Betrachten Sie ein Elektron dessen Wahrscheinlichkeitsamplitude zum Zeitpunkt $t=0$ die Form eines Gauss'schen Wellenpakets hat. Wie Sie aus dem Plenum wissen, zerfließt dieses Wellenpaket mit der Zeit. Betrachten Sie nun ein elektromagnetisches Feld im Vakuum, das zum Zeitpunkt $t=0$ die gleiche Form hat (bis auf einen dimensionsbehafteten Faktor). Überlegen Sie, ob das Wellenpaket des elektromagnetischen Feldes zerfließt. Hinweise: Vergleichen Sie die Dispersionsrelation des Elektrons mit der des elektromagnetischen Feldes. Wie sieht jeweils die Phasengeschwindigkeit aus?

2. Streuung

Ein Strom von Teilchen mit der Energie E fällt von links auf das folgende Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\delta(x) + V_1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

mit $A, V_1 \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Für die Energie E gilt $E > V_1$. Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R . Gilt $T+R=1$?

¹Solche Temperaturen nahe am absoluten Nullpunkt werden mit Hilfe von Lasekühlung und "evaporative cooling" erreicht, z.B. am Atominstitut der TU Wien.

²Sie können Ihre Ergebnisse aus diesem Bsp. mit dem Artikel Nature **401**, 680-682 vergleichen. Zu dem Journal Nature haben Sie über das TUNET Zugang, www.nature.com.

³Der Rekord liegt derzeit bei Molekülen mit ca. 1600 atomaren Masseneinheiten.

(b) Wie groß ist T und R falls $E < V_1$ ist?

3. Transfermatrix, Resonanzstreuung

Es gilt wieder $E > V_1$. Betrachten Sie nun das folgende Potential:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_1 + A\delta(x) + A\delta(x - L) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Skizzieren Sie das Potential. Stellen Sie die Transfermatrizen für jeweils die linke ($x = 0$) und die rechte ($x = L$) Stufe auf.
- (b) Bestimmen Sie die gesamte Transfermatrix durch Multiplikation der beiden Transfermatrizen aus (a). Nehmen Sie dafür an, dass $V_1 \rightarrow 0$ und $E = mA^2/(2\hbar^2)$ gilt. (Hinweis: die Formeln sollten sich damit stark vereinfachen). Bestimmen Sie daraus den gesamten Transmissionskoeffizienten T unter der Annahme, dass der Teilchenstrom von links kommt.
- (c) Wie verhält sich T als Funktion von L? Geben Sie T_{\max} und T_{\min} an. Warum gilt für die Resonanzbedingung nicht mehr $kL = n\pi$ mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ wie im Fall des Kastenpotentials (siehe Plenum: $KL = n\pi$ mit $K = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$, Skriptum Seite 30).

Zu kreuzen: 1, 2, 3a, 3bc