

4. Tutorium - Quantentheorie I - 30.10.2009

1. Betrachten Sie einen Operator A , dessen Wirkung auf die Basiszustände $|e_i\rangle$ wie folgend gegeben sei:

$$A|e_1\rangle = -i|e_3\rangle, \quad A|e_2\rangle = |e_2\rangle, \quad A|e_3\rangle = i|e_1\rangle, \quad (1)$$

- (a) Schreiben Sie die Matrixdarstellung von A bezüglich der Basis $|e_i\rangle$ an. Ist A hermitesch?
- (b) Geben Sie den Operator A in bra-ket Notation an. Zeigen Sie in bra-ket Notation, dass A hermitesch ist.
- (c) Lösen Sie das Eigenwertproblem von A . Führen Sie eine Eigenbasis von A ein und schreiben Sie die Spektraldarstellung von A in der bra-ket Notation an.
- (d) Rechnen Sie explizit nach, dass Ihre Eigenbasis vollständig ist.
- (e) Der Operator P sei gegeben als Projektion auf den Zustand

$$|b\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}[i|e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_3\rangle], \quad P := |b\rangle\langle b| \quad (2)$$

Geben Sie die Matrixdarstellung von P bezüglich der Basis $|e_i\rangle$ an. Zeigen Sie explizit, (in Matrix und bra-ket Schreibweise) dass P ein Projektor ist.

- (f) Geben Sie die Eigenwerte von P an. Sind sie entartet? Welcher Zustand ist Eigenzustand zum Eigenwert 1?
 - (g) Vertauscht A mit P ? Bilden A und P einen vollständigen Satz kommutierender Operatoren? Bilden Sie eine gemeinsame Eigenbasis, in der jeder Zustand durch seine "Quantenzahlen" bezüglich A ($n_A = -1, 1$) und P ($n_P = 0, 1$) definiert ist. Welche Kombinationen von Quantenzahlen erlaubt das System?
2. Betrachten Sie ein symmetrisches, unendlich tiefes Topfpotential der Breite L . Die Eigenfunktionen dieses Systems werden mit $|n\rangle$ ($n \in \mathbb{N}$) notiert. Es gilt

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (3)$$

- (a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator im bra-ket Formalismus an.
- (b) Geben Sie die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi_0\rangle = \alpha(|2\rangle + 2i|4\rangle)$ an.
- (c) Schreiben Sie im bra-ket Formalismus einen Operator P an, der jeder Wellenfunktion ihre Parität zuordnet (d.h. Eigenwerte ± 1 für gerade/ungerade Wellenfunktionen). Ist P ein Projektor? Vertauscht P mit H ?

Zu kreuzen: 1abc, 1def, 1g, 2abc