5. Tutorium - Quantentheorie I - 6.11.2009

1. **Kommutatoren**

   (a) Wir betrachten ein 2-dimensionales Problem. Es seien $\hat{p}_i$ mit $i = 1, 2$ die jeweiligen Impulsoperatoren und $\hat{r}_i$ mit $i = 1, 2$ die jeweiligen Ortsoperatoren. Wie lauten die Operatoren in Orts- und Impulsdarstellung? Berechnen Sie:

   $$[\hat{p}_i, \hat{r}_j], \quad [\hat{p}_i, \hat{r}_j^2]$$

   für alle Kombination von i und j mit $i, j = 1, 2$. Was lässt sich aus Ihrem Ergebnis über die gleichzeitige Diagonalisierbarkeit von $\hat{p}_i$ und $\hat{r}_j$ aussagen? (Mit anderen Worten: sind die Observablen gleichzeitig “scharf” messbar?)

   (b) Betrachten Sie nun den 1-dimensionalen Fall. Gegeben sei der Hamiltonoperator

   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{1}$$

   mit einem allgemeinen Potential $V(\hat{x})$. Berechnen Sie:

   $$[\hat{x}, \hat{H}], \quad [\hat{p}, \hat{H}]$$

   Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

   (c) Betrachten Sie nun zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ auf einem Hilbertraum, für die gilt:

   $$\begin{aligned} [A, [A, B]] &= 0 \\ [B, [A, B]] &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

   Beweisen Sie für diese Operatoren, dass gilt:

   $$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{3}$$

   mit $n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie für Ihren Beweis vollständige Induktion. Was ergibt sich daraus für die Kommutatoren $[\hat{x}, \hat{p}_x^n]$ und $[\hat{x}^n, \hat{p}_x]$?

2. **Impulsdarstellung**
   Wir betrachten den einzigen gebundenen Zustand $|\psi\rangle$ eines delta-Potentials $V(\hat{x}) = -A\delta(\hat{x})$ mit $A \in \mathbb{R}^+$.

(a) Wie sieht der Zustand in Ortsdarstellung aus, $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$? Verwenden Sie dazu das 1. Beispiel aus dem 2. Tutorium.

(b) Berechnen Sie den Zustand in Impulsdarstellung, $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit den Impuls im Intervall $[p, p + dp]$ zu messen? Wie groß ist im Vergleich dazu die Wahrscheinlichkeit für $[-p, -p - dp]$? Bestimmen sie den Erwartungswert von p, $\langle\psi|p|\psi\rangle$.

(d) Welche Eigenschaft muss ein beliebiger Zustand $\phi(x)$ in der Ortsdarstellung haben, damit für diesen Zustand alle Ergebnisse von (c) gelten? (Hinweis: Überlegen Sie wie sich $\tilde{\psi}(p)$ zu $\tilde{\psi}(-p)$ verhält. Das selbe soll nun für $\tilde{\phi}(p)$ gelten.)

Zu kreuzen: 1ab, 1c, 2ab, 2cd