6. Tutorium - Quantentheorie I - 13.11.07

1. Betrachten Sie ein Teilchen im unendlich tiefen Topfpotential (d.h. $V(x) = 0$ für $x \in [0, L]$, ∞ sonst). Die Eigenfunktionen

$$\langle x \,|\, u_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x), \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad H\,|u_n\rangle = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,|u_n\rangle$$

können als bekannt angenommen werden. Das Teilchen befindet sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}\,|u_{2n+1}\rangle\,, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{8\sqrt{15}}{\left[(2n+1)\pi\right]^3}.$$

Hinweis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

   (a) Geben Sie die Spektraldarstellung des Hamiltonoperators H an.

   (b) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\psi\rangle$ normiert ist.

   (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Spektraldarstellung den Erwartungswert der Energie des Teilchens.

   (d) Berechnen Sie die Energieunschärfe des Teilchens, d.h. $\Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$.

   (e) Die Ortsdarstellung des Hamiltonoperators bzw. des obigen Teilchenzustandes ist

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}, \qquad \mathcal{D}_H = \{\, \psi \in \mathcal{H} \,|\, \psi(0) = \psi(L) = 0 \}$$

$$\psi(x) = \langle x \,|\, \psi \rangle = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\, x(L-x)\,.$$

   Berechnen Sie durch explizite Anwendung des Hamiltonoperators in der Ortsdarstellung wiederum $\langle H \rangle$ und ΔE. Aus welchem Grund ist das Ergebnis für ΔE (nicht) korrekt?

2. Betrachten Sie ein quantenmechanisches System zweier gekoppelter Freiheitsgrade, das durch den Hamiltonoperator

$$H := H^{(1)} \otimes \mathbb{1}^{(2)} + \mathbb{1} \otimes^{(1)} H^{(2)}, \quad |a\; b\rangle := |a\rangle^{(1)} \otimes |b\rangle^{(2)}\,, \tag{1}$$

beschrieben wird, wobei

$$H^{(i)}\,|1\rangle^{(i)} = E_1\,|1\rangle^{(i)}\,, \quad H^{(i)}\,|2\rangle^{(i)} = E_2\,|2\rangle^{(i)}\,, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

   (a) Wieviele Dimensionen hat der Zustandsraum des Gesamtsystems? Schreiben Sie die Basiszustände an.

   (b) Geben Sie die Energien der Basiszustände an.

   (c) Das System befinde sich im Zustand $(|1\;2\rangle + |2\;1\rangle)/\sqrt{2}$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie.

   (d) Wie groß ist im Zustand aus (c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Energie des ersten Freiheitsgrades den Wert E_1 zu messen?

   (e) Wie groß ist im Zustand aus (c) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Energie des zweiten Freiheitsgrades den Wert E_1 zu messen?

Zu kreuzen: 1abc, 1de, 2abc, 2de