9. Tutorium - Quantentheorie I - 11.12.09

1. Wir betrachten das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 durch folgende Wellenfunktion beschrieben wird:

$$|\psi\rangle = A\Big[2\,|1\,0\,0\rangle + \sqrt{3}\,|2\,0\,0\rangle - (i+1)\,|2\,1\,0\rangle + \sqrt{7}\,|2\,1\,{-1}\rangle + 2i\,|3\,2\,{-1}\rangle\Big],$$

   wobei $|n\;l\;m\rangle$ die Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatomes bezeichnen.

   (a) Normieren Sie $|\psi\rangle$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0:
   - die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung der Energie den Messwert
     $$E_n = \frac{-\hbar^2}{2ma_0^2}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$
     zu finden,
   - die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Energie E_1 oder E_2 zu finden,
   - den Erwartungswert der Energie.

   (b) Berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0
   - die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrates den Messwert $b_l = \hbar^2\, l(l+1)$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden,
   - die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z-Komponente des Bahndrehimpulses den Messwert $-\hbar$ zu finden,
   - den Erwartungswert der z-Komponente des Bahndrehimpulses.

   (c)
   - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares $\{E,L^2\}$ das Messwertpaar $\{-\hbar^2/(8ma_0^2), 2\hbar^2\}$ zu finden. Hängt das Ergebnis davon ab, ob *zuerst* die Energie und *unmittelbar darauf* das Bahndrehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?
   - Überlegen Sie, was man für die in (a) und (b) errechneten Größen erhält, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird.

2. Betrachten Sie ein quantenmechanisches 2-Niveau System

$$H\,|1\rangle = E_1\,|1\rangle\,, \quad H\,|2\rangle = E_2\,|2\rangle\,. \tag{1}$$

   Ein Operator A sei gegeben durch

$$A\,|1\rangle = |2\rangle\,, \quad A\,|2\rangle = |1\rangle\,. \tag{2}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die möglichen Meßwerte für Operator A $a_1 = 1$ und $a_2 = -1$ sind, und geben Sie die zugehörigen Eigenzustände $|a_i\rangle$ an.

   (b) Das System befinde sich im Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha(|1\rangle + |a_1\rangle). \tag{3}$$

   Normieren Sie den Zustand! Sind $|1\rangle$ und $|a_1\rangle$ orthogonal?

   (c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung von A den Wert 1 zu erhalten.

   (d) Ein ensemble gleichartiger Systeme befinde sich zu 50% im Zustand $|1\rangle$ und zu 50% im Zustand $|a_1\rangle$. Wie müssen Sie ein aus diesem Ensemble zufällig herausgegriffenes System beschreiben? Wie unterscheidet sich diese Beschreibung von der obigen?

   (e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, in einem zufällig aus dem Ensemble herausgegriffenen System bei einer Messung von A den Wert 1 zu erhalten.

Zu kreuzen: 1a, 1b, 1c, 2abc, 2de