# 2. Tutorium VU Quantentheorie I, 22.10.2010 – Lösungen

## Beispiel 1

Alle folgenden Ergebnisse für das 1. Beispiel gelten sowohl für die geraden, wie auch die ungeraden Wellenfunktionen.

(a) $\langle x \rangle = 0$

$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{(n\pi)^2}$

(b) $\Delta x = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{(n\pi)^2}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\langle x \rangle_{\mathrm{kl}} = 0$

$\langle x^2 \rangle_{\mathrm{kl}} = \frac{a^2}{3}$

$\Delta x_{\mathrm{kl}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

## Beispiel 2

$\psi(x) = \sqrt{D}\, e^{-D|x|} \qquad E = -\frac{D^2\hbar^2}{2m}$

## Beispiel 3

(a) Bedingungen für gebundenen Zustand: $E < 0$ und $l \geq \frac{1}{2D}$, wobei die 2. Bedingung aus den Übergangs-, bzw. Randbedingungen für die Wellenfunktion gewonnen wurde. Aufgrund dieser Bedingungen muss nämlich die Gleichung $e^{-2kl} = (1 - \frac{k}{D})$ bzw. $\tanh(kl) = \frac{k}{2D-k}$ (je nachdem, ob man einen Exponentialansatz, oder einen hyperbolischen Ansatz genutzt hat) für ein $k \neq 0$ erfüllt sein. Dies lässt sich durch Vergleich der

Steigung der beiden Kurven, beschrieben durch eben genannte Gleichung, im Punkt $k = 0$ erreichen. Aufgrund dieses Vergleichs erhält man schließlich die erwähnte Einschränkung für gebundene Zustände.

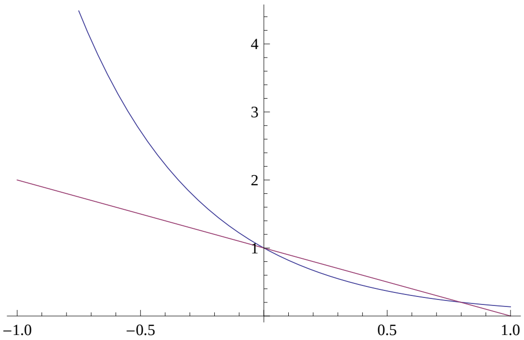


Abbildung 1: gebundener Zustand (für den Exponentialansatz)

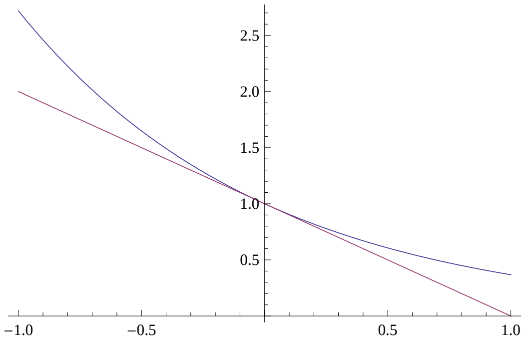


Abbildung 2: kein gebundener Zustand (für den Exponentialansatz)

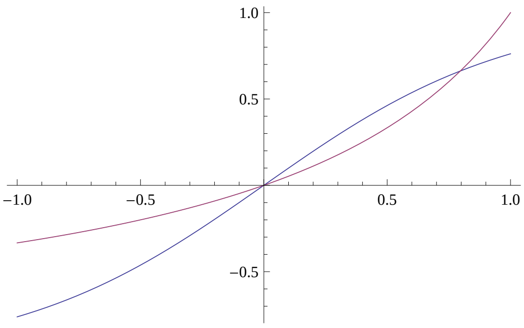


Abbildung 3: gebundener Zustand (für den hyperbolischen Ansatz)

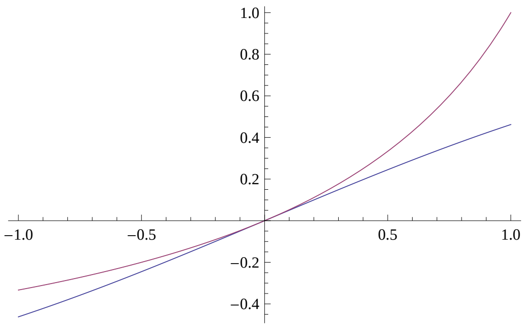


Abbildung 4: kein gebundener Zustand (für den hyperbolischen Ansatz)

(b) Fixpunktiteration $k_{n+1} = D\left(1 - e^{-2k_n l}\right)$, bzw. $k_{n+1} = \frac{2D\tanh(k_n l)}{1+\tanh(k_n l)}$. Mit $k_0 = D$ kann man nach dem 1. Iterationschritt $k$ ungefähr mit $k \approx D\left(1 - e^{-2Dl}\right)$, bzw. $k \approx \frac{2D\tanh(Dl)}{1+\tanh(Dl)}$ abschätzen. Dies liefert für die Energie einen Wert von $E \approx -\frac{\hbar^2 D^2\left(1-e^{-2Dl}\right)^2}{2m}$, bzw. $E \approx -\frac{\hbar^2 4D^2\tanh^2(Dl)}{2m(1+\tanh(Dl))^2}$.

$\lim\limits_{l\to\infty} E(l) = -\frac{\hbar^2 D^2}{2m}$

(c) Lösung für allgemeines $D$ und $l$

$x \leq -l$: $\quad \psi(x) = 0$

$-l \leq x \leq 0$: $\quad \psi(x) = A \left( \frac{D}{k} e^{kx} + \left(1 - \frac{D}{k}\right) e^{-kx} \right)$

$x \geq 0$: $\quad \psi = A \, e^{-kx}$

$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{2k^2} + 2Dl(k-D) - \frac{k-D}{2k^2} + \frac{1}{2k}}}$

Für $D = 1$ folgt daher für die Wellenfunktion

$x \leq -l$: $\quad \psi(x) = 0$

$-l \leq x \leq 0$: $\quad \psi(x) = A \left( \frac{1}{k} e^{kx} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{-kx} \right)$

$x \geq 0$: $\quad \psi = A \, e^{-kx}$

$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2k^2} + 2l(k-1) + \frac{k-1}{2k^2} + \frac{1}{2k}}}$

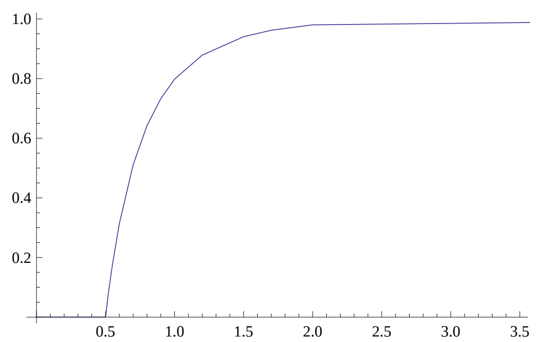


Abbildung 5: $\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ als Funktion von $l$ für $D = 1$,

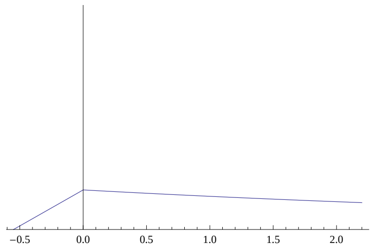


Abbildung 6: Wellenfunktion als Funktion von $x$ für $D = 1$, $l = 0,55$ und $k = 0,17$

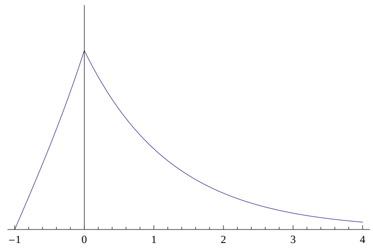


Abbildung 7: Wellenfunktion als Funktion von $x$ für $D = 1$, $l = 1$ und $k = 0,79$

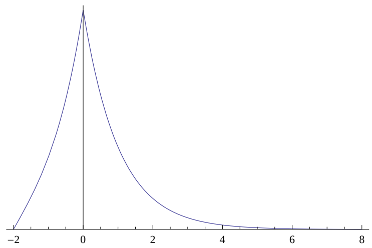


Abbildung 8: Wellenfunktion als Funktion von $x$ für $D = 1$, $l = 2$ und $k = 0,98$

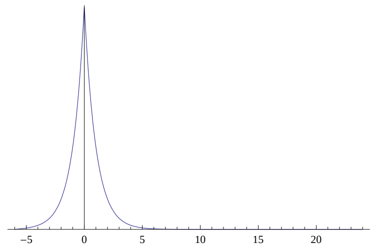


Abbildung 9: Wellenfunktion als Funktion von $l$ für $D = 1$, $l = 6$ und $k = 0,99$