3. Tutorium VU Quantentheorie I, 29.10.2010 – Lösungen ausgearbeitet von Alexander Penn

Beispiel 1

Gegeben ist die Grundzustandswellenfunktion eines symmetrischen, unendlichen Potentialtopfs der Breite 2a.[1]

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right)$$

a

Stellen sie das Problem in einer Skizze dar:

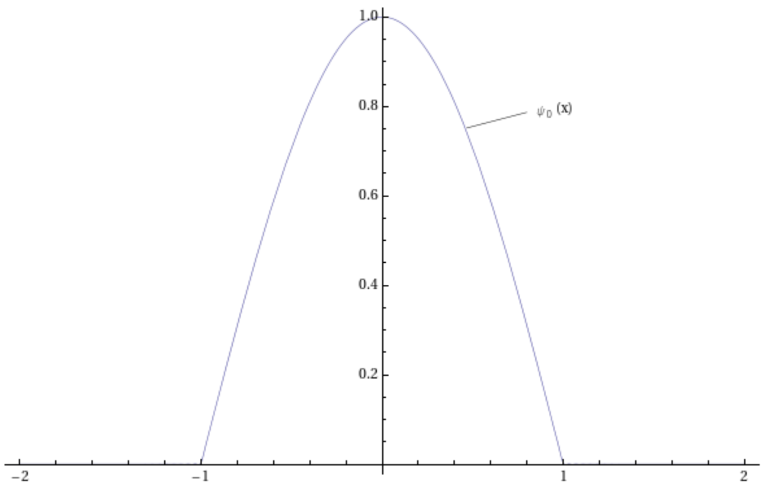

Abbildung 1: Wellenfunktion unmittelbar nach dem Verschieben der Wand

b

Bestimmen sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ für alle Zeiten $t > 0$.

[1] Sie entspricht dem ersten (n=1) der Eigenvektoren, die sich aus dem Eigenwertproblem $H |\Psi_n\rangle = E_{n-1} |\Psi_n\rangle$ ergeben.

Um $\Psi(x,t)$ in einfacher Form darstellen zu können, müssen wir $\Psi_0^{alt}(x)$ als Linearkombination der neuen Basisvektoren (= Eigenvektoren) des vergrößerten Potentialtopfs, $\Psi_n^{neu}(x)$ ausdrücken. Man erhält

$$\Psi(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \Psi_n^{neu}(x,t=0)$$

mit

$$\boxed{c_n = \frac{8\sqrt{2}}{4\pi - n^2\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}.$$

$$\boxed{\Rightarrow \Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \Psi_n^{neu}(x,t=0) \cdot e^{\frac{-i \cdot E_{n-1} \cdot t}{\hbar}},\ E_{n-1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8 \cdot a^2} \cdot n^2}$$

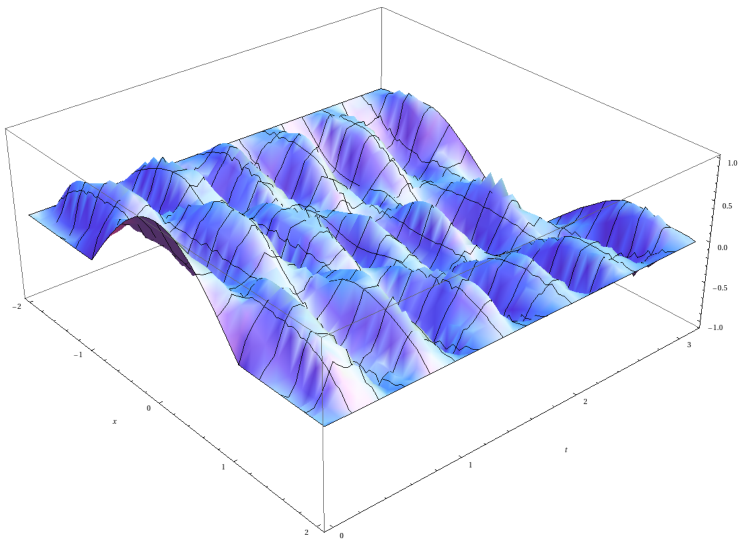

Abbildung 2: Realteil der Zeitentwicklung der Wellenfunktion im neuen Potentialtopf

In Abbildung (2) ist der Realteil der Zeitentwicklung der Wellenfunktion im Zeitintervall $0 \leq t \leq 10\pi$ aufgetragen. [2]

[2] Mathematica-Code: Plot3D[Sum[cn*Psin*Re[Exp[-I*En*t]], m, 0, 100], x, -2 a, 2 a, t, 0, Pi]

c

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen für $t > 0$

i) im Grundzustand
ii) in einem ungeraden Eigenzustand des vergrößerten Potentialtopfs

zu finden?

Antwort:

i) rund 72%

ii) Aus Symmetriegründen ist die Wahrscheinlichkeit Eigenfunktionen mit ungerader Parität zu finden für alle Zeiten gleich 0.

d

Die Wahrscheinlichkeit vor dem Verschieben der Wand die Energie E_0^{alt} zu messen ist gleich (100 %). Die Wahrscheinlichkeit diese Energie nach dem Verschieben zu messen ist gleich 0.

e

Der Erwartungswert der Energie vor dem Verschieben der Wand ist trivialerweise gleich E_0^{alt}.
Für den Erwartungswert der Energie nach dem Verschieben der Wand erhält man ebenfalls:

$$\langle H \rangle_t = \cdots = \sum_n^{\infty} |c_n|^2 E_n = E_0^{alt}$$

Beispiel 2

a

$$\boxed{\Psi(y) \to \Psi(k_y) = -\sqrt{\frac{d}{2\pi}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_y d}{2}\right)}{\left(\frac{k_y d}{2}\right)}}$$

Die geforderte Überprüfung der Heisenberg'schen Unschärferelation

$$\sigma_y \cdot \sigma_{p_y} \geq \frac{\hbar}{2}$$

lässt sich mit den Abschätzungen $\sigma_y = d$ und $\sigma_{p_y} = \frac{4\pi\hbar}{d}$, leicht zeigen.

b

Mithilfe des Strahlensatzes können wir uns y in Abhängigkeit von k_y ausdrücken (klassische Abschätzung): $k_y = \frac{k_0 y}{L}$ und $dk_y = \frac{k_0}{L} d_y$

$$P(k_y) = |\Psi(k_y)|^2 = \frac{d}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_y d}{2}\right)^2}{\left(\frac{k_y d}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow P(y) = \frac{dk_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{yk_0 d}{2L}\right)^2}{\left(\frac{yk_0 d}{2L}\right)^2}$$

c

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachtet werden kann.
Wir integrieren also über Kugelwellen entlang der Spaltes (neue Laufvariable im Spalt $(-d/2 \leq y' \leq d/2)$.

$$P(y) = \frac{1}{|\vec{r}|} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \mathrm{d}y'$$

mit $\vec{r} = \binom{L}{y-y'}$ und $|\vec{r}| \approx L$ sowie $k_0 \approx k_x$
folgt daraus die selbe funktionale Abhängigkeit wie im Punkt b)

$$\boxed{P(y) \propto \frac{\sin\left(\frac{yk_0 d}{2L}\right)^2}{\left(\frac{yk_0 d}{2L}\right)^2}}$$