5. Tutorium VU Quantentheorie I, 12.11.2010 – Lösungen

Beispiel 1

(a)

Aus $\langle a_i \mid a_j \rangle = \delta_{ij}$ folgt durch Einsetzen unmittelbar $\langle b_i \mid b_j \rangle = \delta_{ij}$. Ebenfalls folgt aus der Vollständigkeit der a-Basis ($\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{3} |a_i\rangle \langle a_i|$) jene der b-Basis.

(b)

$|a_1\rangle \overset{\{a\}}{\to} \binom{1}{0}, \quad |a_2\rangle \overset{\{a\}}{\to} \binom{0}{1}, \quad |b_1\rangle \overset{\{a\}}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-i}, \quad |b_2\rangle \overset{\{a\}}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$

(c)

$\langle b_1| \overset{\{a\}}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i), \quad \langle b_2| \overset{\{a\}}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$

(d)

Erhält man unmittelbar durch Einsetzen der Ergebnisse von (a).

(e)

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^{2} |b_i\rangle \langle a_i|$$

$$U_{mn} = \left\langle a_m \middle| \hat{U} \middle| a_n \right\rangle = \langle a_m \mid b_n \rangle$$

$$\hat{U} \overset{\{a\}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

(f)

$$\langle b_i \mid \chi \rangle = \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\left\langle a_i \middle| \hat{U}^\dagger \middle| a_j \right\rangle}_{\hat{U}^{\dagger,\{a\}}_{ij}} \underbrace{\langle a_j \mid \chi \rangle}_{\chi^{\{a\}}_j}$$

$$\langle b_i |T| b_j \rangle = \sum_{m,n} \underbrace{\left\langle a_i \middle| \hat{U}^\dagger \middle| a_n \right\rangle}_{\hat{U}^{\dagger,\{a\}}_{in}} \underbrace{\langle a_n |T| a_m \rangle}_{T^{\{a\}}_{nm}} \underbrace{\left\langle a_m \middle| \hat{U} \middle| a_j \right\rangle}_{\hat{U}^{\{a\}}_{mj}}$$

$$|\chi_j\rangle \overset{\{b\}}{\to} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$T \overset{\{b\}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

(a)

$$A \overset{\{e\}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist hermitesch.

(b)

$$\hat{A} = i\,|e_3\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| - i\,|e_1\rangle \langle e_3| = \hat{A}^\dagger$$

(c)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1; \quad \vec{\lambda_1}^{\{e\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda_2}^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda_3}^{\{e\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U \overset{\{e\}}{\to} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' \overset{\{\lambda\}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Spektraldarstellung von $\hat{A}$ lautet somit:

$$\sum_\lambda |\lambda\rangle\, \lambda\, \langle\lambda| = |\lambda_1\rangle \langle\lambda_1| + |\lambda_2\rangle \langle\lambda_2| - |\lambda_3\rangle \langle\lambda_3|$$

(d)

$$\sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda \langle\lambda| = |\lambda_1\rangle \langle\lambda_1| + |\lambda_2\rangle \langle\lambda_2| + |\lambda_3\rangle \langle\lambda_3| = \mathbb{1}$$

Beispiel 3

(a)

Durch Matrixmultiplikation sieht man ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$A^{2n} = \mathbb{1}, \quad A^{2n+1} = A$$

Die Reihendarstellung der matrixwertigen Exponentialfunktion lässt sich wie folgt schreiben:

$$T(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha A)^n}{n!} = ... = A \sin(i\alpha) + \mathbb{1} \cos(i\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(b)

Die Eigenwerte λ_i einer Matrix M verändern sich bei Anwendung einer Funktion f (die sich als Potenzreihe darstellen lässt) auf diese Matrix wie folgt: $\lambda_i = f(\lambda_i)$ während die Eigenvektoren gleich bleiben. Daraus folgt für die mit der Funktion belastete Spektraldarstellung:

$$M = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda \langle\lambda|$$

$$\Rightarrow f(M) = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle f(\lambda) \langle\lambda|$$

Mit diesem Wissen und Lösen des Eigenwertproblems ergibt sich wiederum die Lösung aus (a).