6. Tutorium VU Quantentheorie I, 19.11.2010 – Lösungen

1. (a)

$$H_{ij}^{\{\Phi\}} = \langle \Phi_i | \hat{H} | \Phi_j \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B_{ij}^{\{\Phi\}} = \langle \Phi_i | \hat{B} | \Phi_j \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2ib \\ 0 & 2ib & 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Operatoren sind offensichtlich hermitesch.

$$[H, B] = HB - BH = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2abi \\ 0 & 2abi & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Die Operatoren kommutieren nicht.

(b) H ist offensichtlich in seiner Eigenbasis gegeben.
Lösung des EW-Problems für B:

$$[|b_1\rangle]^{\{\Phi\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad B_1 = -2b$$

$$[|b_2\rangle]^{\{\Phi\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = b$$

$$[|b_3\rangle]^{\{\Phi\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad B_3 = 2b$$

Orthogonalität $\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij}$ zeigen:

$$\langle b_1 | b_1 \rangle = \ldots = 1$$
$$\langle b_1 | b_2 \rangle = \ldots = 0$$
$$\ldots$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Größe zu messen, entspricht dem Erwartungswert des Projektors auf den entsprechenden Eigenzustand des Operators. Für die Energieeigenwerte von H lautet der Projektor auf den i-ten Eigenzustand $\hat{P}_i = |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|$ und somit

$$W_{E_i} = \langle\hat{P}_i\rangle = \langle\chi|\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|\chi\rangle = |\langle\Phi_i|\chi\rangle|^2$$

Ausrechnen ergibt:

$$\begin{aligned} W_{E_1} &= |\langle\Phi_1|\chi\rangle|^2 = \frac{9}{25} \\ W_{E_2} &= |\langle\Phi_2|\chi\rangle|^2 = 0 \\ W_{E_3} &= |\langle\Phi_3|\chi\rangle|^2 = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

Und für die Eigenwerte von $\hat{B}$:

$$\begin{aligned} W_{B_1} &= |\langle b_1|\chi\rangle|^2 = \frac{8}{25} \\ W_{B_2} &= |\langle b_2|\chi\rangle|^2 = \frac{9}{25} \\ W_{B_3} &= |\langle b_3|\chi\rangle|^2 = \frac{8}{25} \end{aligned}$$

Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle\hat{H}\rangle &= \langle\chi|\hat{H}|\chi\rangle = \frac{23}{25}a \\ \langle\hat{B}\rangle &= \langle\chi|\hat{B}|\chi\rangle = \frac{9}{25}b \end{aligned}$$

(d) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich das System im Eigenzustand $|b_3\rangle$ des Operators $\hat{B}$

$$|\Psi(0)\rangle = |b_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi_2\rangle + i|\Phi_3\rangle\right)$$

$\rightarrow$ Zeitentwicklung:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}at}|\Phi_2\rangle + ie^{-\frac{i}{\hbar}2at}|\Phi_3\rangle\right)$$

Die Wahrscheinlichkeit, zu einem späteren Zeitpunkt wieder den Wert $2b$ zu messen, ist gegeben durch

$$W_{B_3}(t>0) = |\langle b_3|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{a}{\hbar}t\right) \quad .$$

Nun ist das System bei $t_0 = 0$ im Eigenzustand $|\Phi_3\rangle$ des Hamilton-Operators, woraus für die Zeitentwicklung folgt

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}2at}|\Phi_3\rangle \quad .$$

Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, wieder den Wert $2a$ zu messen, zu

$$W_{E_3}(t > 0) = |\langle\Phi_3|\Psi(t)\rangle|^2 = 1 \quad .$$

2. • Beweis:

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] &= \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] \\ &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} \\ &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

• Beweis:

$$\begin{aligned}&\left[\hat{A}, \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\right] + \left[\hat{C}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \left[\hat{B}, \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\right] \\ =&\hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] - \left[\hat{B}, \hat{C}\right]\hat{A} + \hat{C}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] - \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{C}, \hat{A}\right] - \left[\hat{C}, \hat{A}\right]\hat{B} \\ =&\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} + \hat{C}\hat{B}\hat{A} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} - \hat{C}\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} \\ &+ \hat{B}\hat{C}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}\hat{B} = 0 \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

• Berechnung des Kommutators

$$\left[\hat{x}, \hat{H}\right] = \left[\hat{x}, \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \hat{V}(\hat{x})\right] = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}\left[\hat{x}, \hat{p}\right] + \left[\hat{x}, \hat{p}\right]\hat{p}\right) = \frac{i\hbar}{m}\hat{p}$$

Daraus folgt

$$\hat{p} = \frac{m}{i\hbar}\left[\hat{x}, \hat{H}\right]$$

und

$$\langle\Phi|\hat{p}|\Phi\rangle = \frac{m}{i\hbar}\left(\langle\Phi|\hat{x}\hat{H}|\Phi\rangle - \langle\Phi|\hat{H}\hat{x}|\Phi\rangle\right) = \frac{Em}{i\hbar}\left(\langle\hat{x}\rangle - \langle\hat{x}\rangle\right) = 0 \quad .$$

(diese Herleitung ist im Allgemeinen allerdings nur für gebundene, d.h. quadratintegrable, Zustände gültig.)