7. Tutorium VU Quantentheorie I, 26.11.2010 – Lösungen

1.

Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hat{r}}$$

Unschärferelation für Ort und Impuls in Radialrichtung:

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \gtrsim \hbar \;\rightarrow\; \Delta p_r \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta r}$$

Grundzustand s-Welle → zu $\vec{p}$ trägt nur $p_r \equiv p$ bei

$$E = \left\langle \hat{H} \right\rangle \approx \frac{\Delta p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2} = \frac{\hbar^2}{2m\Delta r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta r^2}$$

$$\frac{\partial E\left(\Delta r\right)}{\partial \Delta r} \stackrel{!}{=} 0 \;\rightarrow\; \triangle r_0 = \frac{4\pi\hbar^2\epsilon_0}{me^2} = a_0 \approx 5.3 \cdot 10^{-11} m$$

$$E\left(\triangle r_0\right) = -\frac{1}{32}\frac{me^4}{\hbar^2\pi^2\epsilon_0^2} \approx -13.6 eV$$

2. (a)

$$\Delta x = a\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{n^2\pi^2}\right)^{1/2}$$

$$\langle p \rangle = \langle u_n | \, p \, | u_n \rangle = 0$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \langle u_n | \, p^2 \, | u_n \rangle = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{n\pi\hbar}{2a}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

(b)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{4a^2} = \frac{\left\langle p^2 \right\rangle}{2m}$$

$$\left\langle E^2\right\rangle = \frac{\hbar^4 n^4 \pi^4}{64 a^4 m^2}$$

$$\Delta E = 0$$

$\Delta p \neq 0$:

Begründung 1: $\Delta E = 0$ möglich, weil $\Delta t = \infty$ (Zustand hat unendliche Lebensdauer)

aber Δx ist endlich, daher kann Δp nicht Null sein, sonst Unschärfe verletzt

Begründung 2: $\sin(kx) \sim e^{ikx} - e^{-ikx}$, $\cos(kx) \sim e^{ikx} + e^{-ikx}$, jeweils Überlagerung zweier ebener Wellen

$\rightarrow$ liefern um $p = 0$ symmetrische Impulsverteilungen, für die klarerweise $\langle p\rangle = 0$ gilt, aber $\left\langle p^2\right\rangle > 0$

(c)

(i) im Mittel bei $x = 0 = \langle x\rangle$

(ii) am häufigsten bei den Maxima des Absolutbetrags der jeweiligen Wellenfunktion

3. (a) Schrödingergleichungen für u_1 und u_2 mit der jeweils anderen Wellenfunktion multipliziert:

$$-\frac{\hbar}{2m} u_1'' u_2 + V u_1 u_2 = E u_1 u_2$$

$$-\frac{\hbar}{2m} u_2'' u_1 + V u_2 u_1 = E u_2 u_1$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf:

$$u_1'' u_2 - u_2'' u_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1' u_2 - u_2' u_1\right) = 0 \; \rightarrow \; u_1' u_2 - u_2' u_1 = C$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty} u_1' u_2 - u_2' u_1 = 0 \; \rightarrow \; C = 0$$

Der letzte Ausdruck der vorletzten Zeile mit $C = 0$ entspricht genau dem Verschwinden der Wronsky-Determinante, somit sind u_1 und u_2 linear abhängig.

(b) komplex, konjugierte Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar}{2m} u_1^{\star\prime\prime} + V u_1^\star = E u_1^\star$$

$\rightarrow$ $u_1$und $u_1^\star = u_2$ erfüllen gleiche SG, weil $V(x), E \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $u_1 + u_2 \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösung der SG zum gleichen Eigenwert E.

(c)

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \left(u(x)\, e^{-i\frac{p}{\hbar}x}\right)$$

$$\tilde{\phi}^\star(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \left(u(x)\, e^{+i\frac{p}{\hbar}x}\right) = \tilde{\phi}(-p)$$

weil $u(x) \in \mathbb{R}$.

$$\left|\tilde{\phi}(p)\right|^2 = \left|\tilde{\phi}^\star(p)\right|^2 = \left|\tilde{\phi}(-p)\right|^2$$

(d)

$$\langle p \rangle = \int dp \tilde{\phi}^\star(p)\, p \tilde{\phi}(p) = 0$$

weil $\left|\tilde{\phi}(p)\right|^2 = \left|\tilde{\phi}(-p)\right|^2$
(e)

$$j = Re\left[u^\star(x)\,\frac{\hbar}{im}\frac{\partial}{\partial x}u(x)\right] = 0$$

weil $u \in \mathbb{R}$ und der Ausdruck in der eckigen Klammer somit rein imaginär