1. Tutorium VU Quantentheorie I, 15.10.2010

1. Ein Teilchen, das sich nur entlang einer Dimension bewegen kann, sei durch die folgende Wellenfunktion beschrieben ($b > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$ konstant):
$$\Psi(x) = Ae^{-b|x|}e^{i\phi x}$$
   (a) Welchen Wert muss A annehmen, so dass $\Psi(x)$ sinnvoll normiert ist.

   (b) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Intervall $[-1, 1]$.

2. Betrachten Sie ein System mit einem Freiheitsgrad, das Zustände mit Energien $E \in [0, \infty)$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand mit Energie E befindet, hängt von der Temperatur T ab und ist gegeben durch die Boltzmann-Verteilung
$$P(E; \beta) = \frac{\exp(-\beta E)}{\int_0^\infty \exp(-\beta E')dE'}, \ \beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}\,.$$
   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E \rangle$ der Energie des Systems.

   (b) Modifizieren Sie obiges System, so dass nur mehr diskrete Energien $E_n = \hbar\omega n, n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Wie ändert sich dann der Erwartungswert der Energie?

   (c) Wie hängen die obigen Ergebnisse mit den Strahlungsgesetzen von Rayleigh-Jeans bzw. Planck zusammen (keine Rechnung erforderlich)?

   Hinweis:

   Der Erwartungswert $\langle X \rangle$ einer Zufallsvariablen (bzw. Messgröße) X ist jener Wert, der sich bei vielfachem Wiederholen des dazugehörigen „Experiments“ als Mittelwert der Ergebnisse (bzw. Messungen) ergibt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X)$ auftreten. Für den Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariablen gilt:
$$\langle X \rangle = \int XP(X)dX$$

3. Gegeben sei ein eindimensionaler Stab der Länge L, dessen Temperatur T als Funktion des Ortes $x \in [0, L]$ und der Zeit $t \in (0, \infty)$ untersucht werden soll. Lösen Sie dazu die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \, ,$$

wobei κ der Temperatur-Leitwert ist (dieser bestimmt die Zeit, die zum Temperaturausgleich benötigt wird). Verwenden Sie zur Lösung obiger Differentialgleichung folgende Randbedingungen:

$$T(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad T(L, t) = 0 \, ,$$

für alle Zeiten $t > 0$.

   (a) Vergleichen Sie obige Wärmeleitungsgleichung mit der Schrödinger-Gleichung bzw. der Wellengleichung und diskutieren Sie die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten in der Struktur dieser Gleichungen.

   (b) Lösen Sie das Randwertproblem mittels Separation. Welche physikalische Bedeutung haben die Randbedingungen?

   (c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der ganze Stab auf konstanter Temperatur $T = 1/4$. Passen Sie die aus Punkt (b) hervorgehende Lösung an diesen Anfangswert an.

   (d) Diskutieren Sie, wie das Verhalten von $T(x, t)$ vom Temperatur-Leitwert κ abhängt und stellen Sie den Verlauf von $T(x, t)$ mit Hilfe des Computers graphisch dar. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

Zu kreuzen: 1/2a/2bc/3ab/3cd