10. Tutorium VU Quantentheorie I, 14.1.2011

1. Gegeben sei ein Teilchem im $\mathbb{R}^3$, das durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{N}\,(x+y+z)\,\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}, \quad a, N \in \mathbb{R}$$

beschrieben wird. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\vec{L}^2$ und L_z auf? Stellen Sie dazu die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x,y,z)$ (sh. Abbildung 1) mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar (für eine entsprechende Auflistung sh. z.B. das Buch von Herrn Dr. Grau).

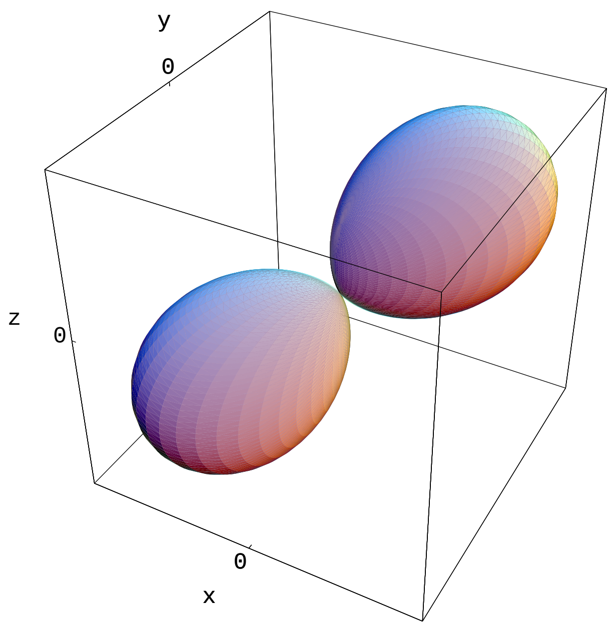

Abbildung 1: Winkelverteilung $|\Theta(\theta,\varphi)|^2$ von $\psi(x,y,z) = R(r)\cdot\Theta(\theta,\varphi)$.

Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_x \rangle$, $\langle \hat{L}_y \rangle$, $\langle \hat{L}_z \rangle$ in obigem Zustand. (Verwenden Sie die Symmetrien des Systems um Ihre Rechnung möglichst zu vereinfachen.)

2. Im vergangenen Tutorium wurde der Vibrationsfreiheitsgrad von Stickstoffmonoxid behandelt. Betrachten Sie nun den Rotationsfreiheitsgrad dieses Moleküls.

(a) Überlegen Sie, wie die Rotationsenergie des Moleküls mit seinem Trägheitsmoment und seinem Drehimpuls in Zusammenhang steht. Erläutern Sie, wie Sie auf Basis dieses klassischen Zusammenhangs und durch die Drehimpulsquantisierung diskrete Werte für die Rotationsenergie erhalten.

(b) Schätzen Sie den Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus im Rotationsspektrum von NO ab. (Der mittlere Abstand d zwischen den beiden Atomkernen des Moleküls kann dabei mit $d \approx 1.15\mathring{A}$ als bekannt angenommen werden.) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den zuvor berechneten Vibrationsanregungen bzw. mit den elektronischen Anregungen im Bereich einiger eV.

(c) Nehmen Sie nun an, Sie stünden vor der Aufgabe ein Gerät zur Messung des NO-Gehalts in der Luft zu konstruieren. Strahlung welcher Wellenlänge muss dieses Messgerät erzeugen, wenn die Molekül-Detektion auf Basis der Rotationsspektren erfolgen soll?

3. Wie lässt sich der Drehimpulsoperator $\hat{L}_{z'}$ bezüglich einer beliebigen Achse z' als Funktion der bekannten Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ ausdrücken? Verwenden Sie dazu die jeweiligen Winkel, die die Achse z' mit den Achsen x, y, z einschließt.

   Wenden Sie Ihr Ergebnis für $\hat{L}_{z'}$ nun auf einen Zustand $|\psi\rangle$ an, welcher Eigenzustand von $\hat{L}_z$ ist: $\hat{L}_z|\psi\rangle = \hbar m|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass Sie bei einer Messung der Observable $L_{z'}$ im Mittel den Messwert $\hbar m \cos\theta$ erhalten, wenn die Achse z' einen Winkel θ mit der z-Achse einschließt. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen "Vektormodells" für den Drehimpuls (sh. Plenumsfolie 154).

4. Leiten Sie ausgehend von den Grundbeziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten,

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta\,,$$

   die Darstellung des Operators $\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten her. Zeigen Sie mithilfe der gefundenen Darstellung von L_z, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\varphi)$ Eigenfunktionen dieses Operators sind.

Zu kreuzen: 1/2/3/4