

11. Tutorium VU Quantentheorie I, 21.01.2011

1. Betrachten Sie die normierten Eigenzustände $|l m\rangle$ der Drehimpulsoperatoren \hat{L}^2 und \hat{L}_z mit $l = 1$ und mit den entsprechenden möglichen Werten für m . (Welche sind das?) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von \hat{L}_x bezüglich der Basis $|l m\rangle$ algebraisch.
 - a) Verwenden Sie die Leiteroperatoren \hat{L}_+ und \hat{L}_- um die Matrixelemente von \hat{L}_x bezüglich der Basis $|l m\rangle$ zu bestimmen.
 - b) Lösen Sie dann die Eigenwertgleichung für \hat{L}_x . Warum müssen sich für die Eigenwerte von \hat{L}_x dieselben Werte wie für \hat{L}_z ergeben?

2. Gegeben sei ein wasserstoffähnliches Ion mit Kernladungszahl Z und nur einem gebundenen Elektron im Grundzustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ verändert sich plötzlich die Kernladungszahl auf Grund einer nuklearen Reaktion (β -Zerfall): $Z \rightarrow Z + 1$. Die Wellenfunktion des Elektrons ändert sich während dieser (schnellen) Reaktion zunächst nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Elektron nach der Kernreaktion im Grundzustand des Ions mit der erhöhten Kernladungszahl zu finden?

Die Energieeigenfunktionen $\psi_{nlm}^Z(r, \theta, \phi) = R_{nl}^Z(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ und die dazugehörigen Eigenenergien E_n^Z eines wasserstoffähnlichen Ions können dabei als gegeben angenommen werden:

$$R_{nl}^Z(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_\mu}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-Zr/na_\mu} \left(\frac{2Zr}{na_\mu}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_\mu}\right)$$

$$E_n^Z = -\left(\frac{Z^2 \hbar^2}{2\mu a_\mu^2}\right) \frac{1}{n^2}, \quad a_\mu = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} = \frac{m_e}{\mu} a_0$$

3. Betrachten Sie die stationären Zustände $|n l m\rangle$ des Wasserstoffatoms ($Z = 1$).
 - a) Das Wasserstoffatom befinde sich im angeregten Zustand mit $n = 2$. Bestimmen Sie die Frequenz des Photons, das beim Übergang in den Grundzustand emittiert wird. In welchem spektralen Bereich liegt die Frequenz? Hängen ihre Ergebnisse von den Quantenzahlen l und m ab? Warum (nicht)?
 - b) Besitzen die Eigenzustände $|n l m\rangle$ des Wasserstoffatoms ein elektrisches Dipolmoment? Berechnen Sie dazu den Erwartungswert $\langle n l m | \vec{d} | n l m \rangle$ mit $\vec{d} = -e\vec{r}$. Hinweis: Stellen Sie Überlegungen zur Parität der auftretenden Ausdrücke an.

4. Betrachten Sie das Wasserstoffatom im Grundzustand $|1\ 0\ 0\rangle$. Berechnen Sie:
- den Erwartungswert und die Unschärfe des Abstandes des Elektrons vom Atomkern,
 - den wahrscheinlichsten Wert dieses Abstandes und
 - die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Abstand $r < a_\mu$ anzutreffen.

Hinweis:

$$\int_0^\infty d\rho \rho^\nu e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

$$\int d\rho \rho^2 e^{-\beta\rho} = - \left[\frac{\rho^2}{\beta} + \frac{2\rho}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} \right] e^{-\beta\rho} + C. \quad (2)$$

Zu kreuzen: 1/2/3/4