# 2. Tutorium VU Quantentheorie I, 22.10.2010

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse $m$ im unendlich tiefen Potentialtopf, d.h. im Potential

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & |x| > a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases} .$$

Die dazugehörigen Wellenfunktionen der Bindungszustände sind:

$$u_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), \; n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$u_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), \; n = 2, 4, 6, \ldots$$

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ für die Zustände $u_{n-1}$.

(b) Berechnen Sie die Standardabweichung der Ortsverteilung, d.h. die Ortsunschärfe $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, für die Zustände $u_{n-1}$. Was bedeutet der Begriff Ortsunschärfe in dem Zusammenhang anschaulich?

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und b) für große Quantenzahlen ($n \to \infty$) mit den Erwartungswerten eines klassischen Teilchens. Beachten Sie, dass die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x)dx$ das Teilchen bei unbekanntem Aufenthaltsort im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden gleich $W(x)dx = \frac{1}{2a}dx$ ist.

2. Ein Teilchen mit Masse $m$ befindet sich in einem kurzreichweitigen Potential $V(x)$, das durch eine $\delta$-"Funktion" angenähert werden kann:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), \; D > 0$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E < 0$, d.h. finden Sie die Energien aller gebundenen Zustände und die dazugehörigen (normierten) Wellenfunktionen. Verwenden Sie dazu die im Plenum für das Potential $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ hergeleiteten Anschlussbedingungen:

$$u(x_0-) = u(x_0+) = u(x_0)$$

$$u'(x_0-) = u'(x_0+) + 2Du(x_0)$$

3. Das System aus Beispiel 2 wird nun im Abstand $l$ neben einer undurchdringlichen Wand positioniert. Das neue Potential ist somit:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x) & x > -l \\ \infty & x \leq -l \end{cases}$$

   (a) Unter welchen Bedingungen hat das System noch einen gebundenen Zustand? Veranschaulichen Sie das Problem grafisch.

   (b) Wie wird die Bindungsenergie des Teilchens in dem Fall durch die Wand verändert? Geben Sie eine Näherung für große Abstände $l$ an.

   (c) Finden Sie eine numerische Lösung von b) für $D = 1$. Stellen Sie die Bindungsenergie (bzw. $\frac{Em}{\hbar^2}$) und die Wellenfunktion grafisch in Abhängigkeit von $l$ dar.

Zu kreuzen: 1/2/3ab/3c