3. Tutorium VU Quantentheorie I, 29.10.2010

1. Ein Teilchen der Masse m befindet sich im Grundzustand $\Psi_0(x)$ des unendlich tiefen Potentialtopfes, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & |x| > a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases}, \quad \Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right), \quad E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden die Wände plötzlich zu den Positionen $-2a$ bzw. $2a$ verschoben. Sie können annehmen, dass das schnelle Verschieben der Wände den Zustand der Wellenfunktion nicht verändert („sudden approximation"), d.h. $\Psi(x, 0)=\Psi_0(x)$.

(a) Stellen Sie das Problem in einer Skizze dar.

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ für alle Zeiten $t > 0$.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen für $t > 0$ im Grundzustand bzw. in einem ungeraden Eigenzustand des vergrößerten Potentialtopfes zu finden?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit vor bzw. nach dem Verschieben der Wand die Energie E_0 zu messen?

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie vor bzw. nach dem Verschieben der Wand, also $\langle H \rangle_{t=0}$ und $\langle H \rangle_{t>0}$.

Hinweise:

- Setzen Sie die Eigenzustände und Eigenenergien des unendlich tiefen Potentialtopfs als bekannt voraus.

- $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2}{((2m+1)^2-4)^2} = \frac{\pi^2}{16}$, $m \in \mathbb{N}$

2. Betrachten Sie den in der Abbildung auf der nächsten Seite dargestellten Aufbau für die Beugung eines von links einfallenden Stroms von Teilchen an einem Spalt mit der Breite d. Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion der Teilchen direkt am Spalt ($x = x_0$) durch eine kastenförmige Welle beschrieben wird, die sich in Einfallsrichtung x wie eine ebene Welle mit Impuls $\hbar k_0$ bewegt,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \exp(ik_0x)/\sqrt{d} & -d/2 \leq y \leq d/2 \\ 0 & |y| \geq d/2 \end{cases}.$$

Die Teilchen werden auf einem Schirm gemessen, der sich in einem Abstand L vom Spalt befindet.

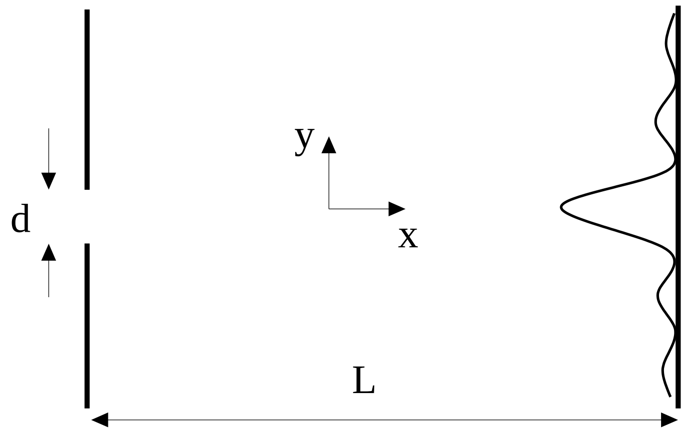

Abbildung 1: Experiment zur Beugung am Spalt.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $\psi(x, y)$ im Spalt ($x = x_0$). Überprüfen Sie, ob die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort y und Impuls p_y erfüllt ist. (*Hinweis:* Schätzen Sie die Unschärfen σ_y, σ_{p_y} der Einfachheit halber mit dem Abstand zwischen den ersten beiden Nullstellen der jeweiligen Funktionen ab.)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(y)$ ein Teilchen an der Position y des Schirms (bei festem $x = x_0 + L$) zu messen (unter der Annahme $L \gg d, y$ und dass zwischen Spalt und Schirm kein Potential auf das Teilchen wirkt, d.h. dort $V(x, y) = 0$ gilt). Verwenden Sie dabei, dass die Fourier-Transformierte aus (a) die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchen einen bestimmten Impuls in y-Richtung aufweisen, bestimmt. Reproduzieren Sie damit das bekannte Resultat aus der Beugungstheorie,

$$P(y) = C \left[\frac{\sin(Ay)}{Ay} \right]^2 .$$

Bestimmten Sie die Konstanten A, C.

(c) Erläutern Sie Ihr obiges Ergebnis für $P(y)$ anhand des Huygensschen Prinzips (siehe dazu optische Beugung am Spalt).

Zu kreuzen: 1abc/1de/2ab/2c