5. Tutorium VU Quantentheorie I, 12.11.2010

1. Gegeben sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbertraum, für den eine Basis durch zwei orthonormierte Vektoren $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ gegeben ist (Basis der $\{a\}$-Darstellung). Eine weitere Basis des Hilbertraums sei durch die Vektoren,

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right) , \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\right) ,$$

definiert (Basis der $\{b\}$-Darstellung).

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden. Benutzen Sie dazu die bra-ket Notation.

(b) Welche Matrizen sind den Ketvektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

(c) Welche Matrizen sind den Bravektoren $\langle b_1|$, $\langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

(d) Schreiben Sie die inneren Produkte $\langle b_1|b_1\rangle$, $\langle b_1|b_2\rangle$, $\langle b_2|b_2\rangle$ als Produkte der entsprechenden Matrizen an.

(e) Drücken Sie den unitären Operator $\hat{U}$, der den Basiswechsel $|b_i\rangle = \hat{U}|a_i\rangle$ beschreibt, durch die Vektoren $|a_i\rangle$, $|b_j\rangle$ aus. Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

(f) Ein Ketvektor $|\chi\rangle$ und ein linearer Operator $\hat{T}$ seien in der $\{a\}$-Darstellung durch folgende Matrizen gegeben:

$$\chi^{\{a\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad T^{\{a\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wie lauten die entsprechenden Matrizen von $|\chi\rangle$ und $\hat{T}$ in der $\{b\}$-Darstellung?

2. Gegeben sei ein dreidimensionaler komplexer Hilbertraum. Der Operator $\hat{A}$ sei durch seine Wirkung auf die Basiszustände $|e_i\rangle$ definiert:

$$\hat{A}\,|e_1\rangle = i\,|e_3\rangle\,, \quad \hat{A}\,|e_2\rangle = |e_2\rangle\,, \quad \hat{A}\,|e_3\rangle = -i\,|e_1\rangle$$

   (a) Finden Sie die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ bezüglich der Basis $|e_i\rangle$ ($\{e\}$-Darstellung). Ist die Matrix $A^{\{e\}}$ hermitesch?

   (b) Geben Sie den Operator $\hat{A}$ in bra-ket Notation an. Zeigen Sie in bra-ket Notation, dass $\hat{A}$ hermitesch ist. Welche besondere Bedeutung haben hermitesche Operatoren in der Quantenmechanik?

   (c) Lösen Sie das Eigenwertproblem von $\hat{A}$ und diagonalisieren Sie die entsprechende Matrix $A^{\{e\}}$, d.h. finden Sie eine unitäre Matrix U und die Diagonalmatrix A', so dass $A' = U^\dagger A^{\{e\}} U$. Schreiben Sie außerdem die Spektraldarstellung von $\hat{A}$ in der bra-ket Notation an.

   (d) Rechnen Sie explizit nach, dass Ihre Eigenbasis vollständig ist.

3. Gegeben seien eine selbstadjungierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

und eine reelle Konstante α. Berechnen Sie die Exponentialfunktion $T(\alpha) := \exp(i\alpha A)$

   (a) durch direkte Taylorreihenentwicklung,

   (b) und unter Verwendung der Spektraldarstellung bzw. Diagonalisierung der Matrix A.

Zu kreuzen: 1abcd/1ef/2/3