6. Tutorium VU Quantentheorie I, 19.11.2010

1. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben:

$$\begin{array}{rclcrcl} \hat{H}|\phi_1\rangle & = & -a|\phi_1\rangle & \qquad & \hat{B}|\phi_1\rangle & = & b|\phi_1\rangle \\ \hat{H}|\phi_2\rangle & = & a|\phi_2\rangle & & \hat{B}|\phi_2\rangle & = & 2ib|\phi_3\rangle \\ \hat{H}|\phi_3\rangle & = & 2a|\phi_3\rangle & & \hat{B}|\phi_3\rangle & = & -2ib|\phi_2\rangle \end{array}$$

   (a) Bestimmen Sie die Matrizen $H^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$, die den Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ zugeordnet sind.
   Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch? Kommutieren $\hat{H}$ und $\hat{B}$?

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{B}$. Ordnen Sie die Zustände aufsteigend nach den dazugehörigen Eigenwerten und geben Sie die Vektordarstellung der Eigenzustände in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ an. Überprüfen Sie, ob die Eigenzustande orthogonal sind.

   (c) Der Zustand eines Teilchens sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch

$$|\chi\rangle = \frac{1}{5}\left(3|\phi_1\rangle + 4|\phi_3\rangle\right) \tag{1}$$

   gegeben.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, bei einer Energiemessung die Energieeigenwerte E_1, E_2, E_3, bzw. bei einer Messung der Observablen B die Eigenwerte B_1, B_2, B_3 zu messen.
   Berechnen Sie außerdem die Erwartungswerte der Energie und der Observablen B.

   (d) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird bei einer Messung der Observablen B der Wert $2b$ gemessen. Unmittelbar nach der Messung befindet sich das Teilchen im dazugehörigen Eigenzustand („Kollaps der Wellenfunktion“). Mit welchen Wahrscheinlichkeiten wird bei einer neuerlichen Messung von B zum Zeitpunkt $t > 0$ wieder der Wert $2b$ gemessen?

   Bei einem anderen Experiment wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Energie $2a$ gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zu einem späteren Zeitpunkt t wieder die Energie $2a$ zu messen?

2. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen für die Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ und $\hat{C}$:

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$\left[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]\right] + \left[\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] + \left[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]\right] = 0 \quad \text{(Jacobi-Identität)}$$

Verwenden Sie diese Kommutator-Beziehungen, um den Kommutator des Ortsoperators $\hat{x}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(\hat{x})$ zu berechnen. Was folgt daraus für den Erwartungswert $\langle\phi|\hat{p}|\phi\rangle$, wenn $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist?

Zu kreuzen: 1ab/1cd/2