7. Tutorium VU Quantentheorie I, 26.11.2010

1. Schätzen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation den Atomradius und die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms ab. Nehmen Sie dazu an, dass das Elektron im Grundzustand das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$ minimiert und schreiben Sie die kinetische bzw. die potentielle Energie des Elektrons als Funktion der Ortsunschärfe Δx an (alle numerischen Faktoren der Größenordnung 1 können ignoriert werden). Wenn Sie nun die Gesamtenergie in Ihrer Abschätzung als Funktion von Δx optimieren, sollten Sie für den Atomradius und die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms Ergebnisse erhalten, die in der Größenordnung mit jenen aus dem Experiment übereinstimmen.

2. Betrachten Sie den im 1. Beispiel des 2. Tutoriums behandelten Potentialtopf unendlicher Tiefe und die darin gebundenen Zustände $u_n(x)$.

   (a) Ermitteln Sie das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$ für die n-te Eigenfunktion $u_n(x)$ und überprüfen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation für alle Werte von n erfüllt ist. (Ihr Ergebnis für Δx aus dem 2. Tutorium können Sie als gegeben voraussetzen.)

   (b) Zeigen Sie, dass die Energie der stationären Zustände $u_n(x)$ genau (scharf) definiert ist (d.h. dass die Energieunschärfe $\Delta E = 0$). Nachdem die Energie im unendlich tiefen Potentialtopf rein kinetisch ist, könnte man argumentieren, dass somit auch der Impuls scharf definiert sein muss ($\Delta p = 0$). Wieso ist dieses Argument offenbar falsch?

   (c) Nehmen Sie an, dass Sie viele identische Potentialtöpfe vor sich haben in denen ein Teilchen immer im Zustand $u_n(x)$ präpariert ist (n ist gleich für alle Potentialtöpfe). An jedem einzelnen der Potentialtöpfe werde nun jeweils eine Ortsmessung durchgeführt. Welche Messwerte erhalten Sie bei Ihren Messungen (i) im Mittel bzw. (ii) am häufigsten (Antwort ohne Rechnung)?

3. Die im Beispiel 2 verwendeten Wellenfunktionen $u_n(x)$ für die gebunden Zustände im unendlich tiefen Potentialtopf besitzen folgende Eigenschaften:

   (a) Zu jeder Eigenenergie E_n existiert nur genau ein einziger linear unabhängiger Eigenzustand $u_n(x)$ (d.h. es liegt keine Entartung vor).

(b) Die Wellenfunktion $u_n(x)$ kann immer reellwertig gewählt werden.

(c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Impulsmessung ist nicht vom Vorzeichen des Impulses abhängig, $|\tilde{u}_n(p)|^2 = |\tilde{u}_n(-p)|^2$.

(d) Der Erwartungswert des Impulses ist null.

(e) Der Erwartungswert der Stromdichte ist null.

Beweisen Sie, dass obige Eigenschaften (a)-(e) für alle gebundenen stationären Zustände in einem beliebigen eindimensionalen Potential $V(x)$ gelten. Diskutieren Sie wie man jede dieser Eigenschaften physikalisch verstehen kann.

Gehen Sie zum Beweis von (a) davon aus, dass zwei verschiedene Eigenfunktionen $[u_n(x)]_1$, $[u_n(x)]_2$ die Schrödingergleichung mit demselben Eigenwert E_n erfüllen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,[u_n''(x)]_i + V(x)\,[u_n(x)]_i = E_n[u_n(x)]_i \quad \text{mit} \quad i = 1,\, 2\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass Sie darauf aufbauend zu folgender Beziehung gelangen können:

$$[u_n(x)]_2\,[u_n'(x)]_1 - [u_n(x)]_1\,[u_n'(x)]_2 = C\,. \tag{2}$$

Um den gesuchten Beweis zu erbringen, bestimmen Sie nun zuerst die Konstante C und zeigen Sie anhand von Gl. (2), dass die beiden Eigenfunktionen $[u_n(x)]_1$, $[u_n(x)]_2$ voneinander linear abhängig sind. Verwenden Sie das Resultat, dass die Wellenfunktion für gebundene Zustände im Unendlichen verschwindet, $u_n(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.

Zum Beweis von (b) ist es zielführend anzunehmen, dass $[u_n(x)]_2 = [u_n(x)]_1^*$. Erfüllt unter diesen Umständen $[u_n(x)]_2$ die Schrödingergleichung wenn $[u_n(x)]_1$ sie erfüllt? Überlegen Sie, wie eine Linearkombination von $[u_n(x)]_1$ und $[u_n(x)]_2$ konstruiert werden kann, die die gesuchte reellwertige Funktion $u_n(x)$ ergibt.

Zum Beweis jedes einzelnen der Punkte (a)–(e) können die Resultate aus den jeweils vorhergehenden Punkten als gegeben vorausgesetzt werden.

Zu kreuzen: 1/2/3ab/3cde