8. Tutorium VU Quantentheorie I, 10.12.2010

1. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ seien zwei lineare, hermitesche Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert (a, $b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \hat{A}|e_1\rangle &= 2a|e_1\rangle & \hat{B}|e_1\rangle &= b|e_1\rangle \\ \hat{A}|e_2\rangle &= -2a|e_2\rangle & \hat{B}|e_2\rangle &= ib|e_3\rangle \\ \hat{A}|e_3\rangle &= -2a|e_3\rangle & \hat{B}|e_3\rangle &= -ib|e_2\rangle \end{aligned}$$

   (a) Berechnen Sie die Matrizen $A^{\{e\}}$ und $B^{\{e\}}$, die den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ zugeordnet sind.

   (b) Können die beiden Observablen A und B gleichzeitig scharf gemessen werden?

   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$, deren Entartungsgrad, sowie ein Orthonormalsystem $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ gemeinsamer Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Diagonalisiern Sie dazu zunächst die Matrix $A^{\{e\}}$ und stellen Sie dann den Operator $\hat{B}$ in der Eigenbasis von $A^{\{e\}}$ dar (siehe Plenum vom 02.12.2010).

   Wie lauten die möglichen Messwertpaare bei gleichzeitiger Messung der beiden Observablen?

   (d) Zeigen Sie, dass die gemeinsamen Eigenvektoren $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ auch Eigenvektoren von $\hat{A}\hat{B}$ bzw. $\hat{A} + i\hat{B}$ sind. Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

   (e) Welche Matrizen $A^{\{g\}}$ und $B^{\{g\}}$ sind den beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ zugeordnet?

   Überprüfen Sie für Ihre Matrizen, ob die Invarianz der Spurbildung unter Basistransformationen erfüllt ist.

2. Die Ortsdarstellung eines Energieeigenzustandes des harmonischen Oszillators ist

$$\langle x \,|\, n \rangle = u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right),$$

wobei $H_n(x)$ das n-te Hermite-Polynom bezeichnet.

(a) Rechnen Sie in der Ortsdarstellung explizit nach, dass:

- $\hat{a}^\dagger \,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$
- $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

Stellen Sie dazu den Erzeuger (Vernichter) als Linearkombination des Orts- und Impulsoperators dar und verwenden Sie

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

(b) Stellen Sie den Vernichtungsoperator a durch x und $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ dar. Berechnen Sie explizit die Grundzustandsfunktion $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ des harmonischen Oszillators, indem Sie die Differentialgleichung $a\psi_0(x) = 0$ lösen.

(c) Berechnen Sie explizit $\psi_1(x) = \langle x|1\rangle$, indem Sie $a^\dagger$ auf $\psi_0(x)$ wirken lassen.

3. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei der Zustand eines Teilchens im harmonischen Oszillatorpotential durch

$$|\psi\rangle = N(3|1\rangle + |2\rangle)$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N

(b) Berechnen Sie die Energieunschärfe σ_H.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert bei einer Ortsmessung des Teilchens zum Zeitpunkt $t_0 = 0$.

Zu kreuzen: 1/2a/2bc/3