9. Tutorium VU Quantentheorie I, 17.12.2010

1. Betrachten Sie ein zweiatomiges Molekül dessen Atome gegeneinander schwingen (sh. Skizze). Bei kleinen Amplituden können diese Schwingungen durch ein harmonisches Oszillatorpotential der folgenden Form modelliert werden,
$$V(x) = \frac{1}{2}\, K(x - x_0)^2\,, \tag{1}$$
wobei x den Abstand der beiden Atomkerne zueinander angibt. Die Gleichgewichtsposition x_0 und die "Federkonstante" K werden durch die kovalente Bindung der Elektronen sowie durch die Abstoßung der beiden Atomkerne bestimmt und können als bekannt vorausgesetzt werden.

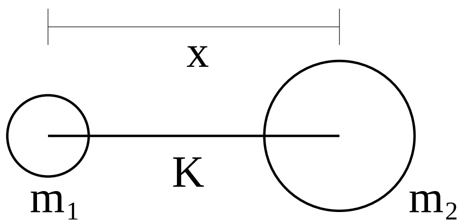

Abbildung 1: Zweiatomiges Molekül.

   (a) Zeigen Sie wie die klassische Schwingungsfrequenz ν des Moleküls mit der Konstante K und der reduzierten Masse des Systems zusammenhängt.

   (b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie der Vibrationen (in eV), wenn Sie annehmen, dass es sich bei dem Molekül um Stickstoffmonoxid (NO) mit $K = 1550 N/m$ handelt.

   (c) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen dem ersten angeregten Vibrationszustand und dem Grundzustand (in eV). In welchem Wellenlängen- und Frequenzbereich befindet sich die Strahlung, die durch einen entsprechenden Übergang im Molekül entsteht?

2. Ein Teilchen der Masse m befinde sich im harmonischen Oszillatorpotential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Konstruieren Sie einen normierten Zustand

als Linearkombination aus dem Grundzustand $|0\rangle$ und dem ersten angeregten Zustand $|1\rangle$,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,,$$

sodass der Erwartungswert $\langle x \rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$ möglichst negativ wird. Motivieren Sie Ihr Ergebnis anhand der entsprechenden Ortsdarstellungen der Wellenfunktionen.

Hinweis: Betrachten Sie separat die Beträge und die relative Phase der komplexen Konstanten α, β.

3. Betrachten Sie das im Pariser Panthéon angebrachte Foucaultsche Pendel. Dieses besteht aus einem Pendelkörper der Masse $m = 28$kg der an einem (masselosen) Draht der Länge $l = 67$m angebracht ist (sh. Abbildung 1). In der Schwingungsebene des Pendels führt die Masse Oszillationen mit einer Maximalamplitude von $x_{\max} = 2.5$m durch (ohne Reibung).

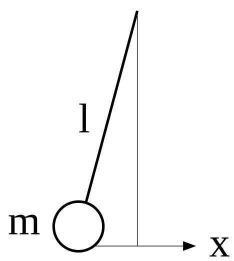

Abbildung 2: Klassisches Pendel.

   (a) Zeigen Sie wie die klassische Kreisfrequenz ω des Pendels mit der Drahtlänge l und der Fallbeschleunigung g zusammenhängt (unter der Voraussetzung von kleinen Schwingungsamplituden).

   (b) Konstruieren Sie einen kohärenten Glauber-Zustand welcher die klassische Bewegung des Pendels möglichst genau nachvollzieht. Passen Sie den entsprechenden Zustand an die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ an: $x(t_0) = x_{\max}$ und $p(t_0) = 0$.

   (c) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfen Δx, Δp für diesen Zustand. Überprüfen Sie, ob Ihr Zustand das kleinstmögliche Unschärfeprodukt erfüllt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für Δx mit dem Durchmesser eines Neutrons.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ und die Energieunschärfe ΔE des Zustands. Bestätigen Ihre Ergebnisse die Erwartung, dass die relative Energieunschärfe für makroskopische Auslenkungsamplituden x_{max} klein ist, $\Delta E / \langle E \rangle \ll 1$?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ bei einer Energiemessung an Ihrem Oszillator-Zustand die Energie $E_n = \hbar\omega(2n+1)/2$ zu erhalten? Skizzieren Sie den Verlauf von $W(n)$ bzw. plotten Sie den Verlauf mit dem Computer.

Bemerkung: Mehr zum Thema Foucaultsches Pendel finden Sie unter folgendem Link: *http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault's_pendulum*

Zu kreuzen: 1/2/3ab/3cde