Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, DI. G. Rohringer

Nachtest zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

A **Name:** **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	B4	Σ
5+3*	9	8	8	30+3*

1. Verständnisfragen zur Quantentheorie

1+2+2+3 Punkte*

a) Mit Hilfe zweier Stern-Gerlach-Apparate messen Sie zunächst S_x und unmittelbar danach S_z. Geben Sie in Abhängigkeit von der ersten Messung die möglichen Messwerte und Wahrscheinlichkeiten der S_z-Messung an.

b) Welche der folgenden Operatoren sind unitär, hermitesch, antihermitesch (d.h. $A^\dagger = -A$), Projektionsoperatoren? (H und O sind hermitesch, $t > 0$ ist eine reelle Zahl)

$$e^{iHt} \quad , \qquad [H, O] \quad , \qquad [\mathbf{1} + H]^{-1}$$

c) Als sogenannte Lyman-, Balmer-, Paschen- ... Linien werden die Emissionslinien (von Photonen) des Wasserstoff-Atoms bezeichnet. Geben Sie die allgemeine Form für die Energien der Emissionslinien an.

d) Drücken Sie den Zustand $|j = 5, m_j = 5, l = 3, l' = 2\rangle$ zweier zum Gesamtdrehimpus J gekoppelter Drehimpulse L und L' durch die Eigenfunktionen zu L,L_z und L',L'_z aus. Machen Sie dies nun mit Hilfe der Leiteroperatoren (!) auch für $|j = 5, m_j = 4, l = 3, l' = 2\rangle$.

Zur Erinnerung: $L_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|lm \pm 1\rangle$.

2. Zeitentwicklung und Messprozess

3+3+2= 8 Punkte

Betrachten Sie ein Dreiniveausystem in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Der Hamilton-Operator des Systems ist

$$H = \epsilon \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|\right) + \Delta \left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

wobei ϵ und Δ reelle, positive Konstanten sind. In dieser Basis sei auch die Observable O durch $O = \hbar\left(|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|\right)$ definiert.

a) Das System befindet sich bei $t = 0$ im ersten Zustand, d.h. $|\Psi(t = 0)\rangle = |1\rangle$. Berechnen Sie den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Observablen O bei $t = t^*$. Welche Messergebnisse bekommen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit?

c) Betrachten Sie nun den Fall, dass das System sich bei $t = 0$ im dritten Zustand befindet, d.h. $|\Psi(t = 0)\rangle = |3\rangle$. Berechnen Sie für diesem Fall wieder den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$ und den Erwartungswert sowie die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messergebnisse der Observable O bei $t = t^*$.

3. Teilchen in der Kugel *2+3+4=9 Punkte*

Gegeben ist das rotationssymmetrische Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| < a \\ \infty & |\vec{r}| > a \end{cases}$$

a) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion und geben Sie die Randbedingungen an.

b) Beweisen Sie, dass der Grundzustand Drehimpuls $l = 0$ hat.

c) Berechnen Sie die Grundzustandswellenfunktion und -energie.

4. Eindimensionaler harmonischer Oszillator *2+4.5+1.5=8 Punkte*

Gegeben ist ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Federkonstante K:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2,$$

was einer Oszillatorfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ entspricht.
Der Hamilton-Operator sei durch den zusätzlichen Beitrag αp^2 gestört.

a) Geben Sie die Eigenenergien von $H_0 + \alpha p^2$ exakt an.

b) Berechnen Sie in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie die Energie-Korrekturen von αp^2 auf das Spektrum von H_0.

c) Sind die Ergebnisse aus **b)** sinnvoll? Warum?

Zur Erinnerung: Der Effekt des Impuls-Operators p auf die Eigenzustände $|n\rangle$ von H_0 ist folgender: $p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)$ mit $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

Viel Erfolg!