Nachtest zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

B **Name:** **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	B4	Σ
8	8	5+3*	9	30+3*

1. Störungstheorie

2+4.5+1.5=8 Punkte

Gegeben ist ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Federkonstante k:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}k_0 x^2,$$

was einer Oszillatorfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$ entspricht.
Der Hamilton-Operator sei durch den zusätzlichen Beitrag $-\frac{\beta}{2m}p^2$ gestört ($\beta \ll 1$).

a) Berechnen Sie in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie die Energie-Korrekturen von $-\frac{\beta}{2m}p^2$ auf das Spektrum von H_0.

b) Geben Sie die Eigenenergien mit Störterm exakt an. Sind die Ergebnisse aus **a)** sinnvoll? Warum?

Zur Erinnerung: Der Effekt des Impuls-Operators p auf die Eigenzustände $|n\rangle$ von H_0 ist folgender: $p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(a^\dagger - a)$ mit $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

2. Zeitentwicklung und Messprozess

2+3+3= 8 Punkte

Betrachten Sie ein Dreiniveausystem in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Der Hamilton-Operator des Systems ist

$$H = \alpha\,(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|) + \beta\,(|3\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3|)$$

wobei α und β reelle, positive Konstanten sind. In dieser Basis sei auch die Observable A durch $A = (|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|)$ definiert.

a) Das System befindet sich bei $t = 0$ im ersten Zustand, d.h. $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$. Berechnen Sie für diesem Fall den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$ und den Erwartungswert sowie die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messergebnisse der Observable A bei $t = t^*$.

b) Betrachten Sie nun den Fall, dass das System sich bei $t = 0$ im dritten Zustand befindet, d.h. $|\Psi(t = 0)\rangle = |3\rangle$. Berechnen Sie nun für diesen Fall den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$.

c) Berechnen Sie mit dem Zustand aus (b) den Erwartungswert der Observablen A bei $t = t^*$. Welche Messergebnisse bekommen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit?

3. Verständnisfragen zur Quantentheorie *2+2+1+3* Punkte*

a) Welche der folgenden Operatoren sind unitär, hermitesch, antihermitesch (d.h. $A^\dagger = -A$), Projektionsoperatoren? (H und O sind hermitesch, $t > 0$ ist eine reelle Zahl)

$$e^{Ht} \quad , \qquad i[H,O] \quad , \qquad e^{i[H,O]}$$

b) Als sogenannte Lyman-, Balmer-, Paschen- ... Linien werden die Emissionslinien (von Photonen) des Wasserstoff-Atoms bezeichnet. Geben Sie die allgemeine Form für die Energien der Emissionslinien an.

c) Mit Hilfe zweier Stern-Gerlach-Apparate messen Sie zunächst S_z und unmittelbar danach S_x. Geben Sie in Abhängigkeit von der ersten Messung die möglichen Messwerte und Wahrscheinlichkeiten der S_x-Messung an.

d) Drücken Sie den Zustand $|j = 5, m_j = 5, l = 2, l' = 3\rangle$ zweier zum Gesamtdrehimpus J gekoppelter Drehimpulse L und L' durch die Eigenfunktionen zu L,L_z und L',L'_z aus. Machen Sie dies nun mit Hilfe der Leiteroperatoren (!) auch für $|j = 5, m_j = 4, l = 2, l' = 3\rangle$.

<u>Zur Erinnerung:</u> $L_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|lm \pm 1\rangle$.

4. Rotationssymmetrisches Potential *2+3+4=9 Punkte*

Gegeben ist der folgende Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad V(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| < R \\ \infty & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

a) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion und geben Sie die Randbedingungen an.

b) Beweisen Sie, dass der Grundzustand Drehimpuls $l = 0$ hat.

c) Berechnen Sie die Grundzustandswellenfunktion und -energie.

Viel Erfolg!