Musterlösung Nachtest (Test B Änderungen in Rot)

A1 bzw. B3

a) bzw. c)

1. Messung S_z

$+\hbar/2$		$-\hbar/2$		Messerg. EW
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$		EF

2. Messung S_x

$+\hbar/2$	$-\hbar/2$	$+\hbar/2$	$-\hbar/2$	Messerg.
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	Wahrsch.
$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	EF (nicht verlangt)

B3c analog $S_z \leftrightarrow S_x$

b) $(e^{iHt})^+ = e^{-iHt}$ unitär (i.A. nicht herm, antiherm, Proj.Op.)

bzw. a) $(e^{Ht})^+ = e^{Ht}$ hermitesch (i.A. nicht antiherm, unitär, Proj.Op.)

$[H,O]^+ = (HO)^+ - (OH)^+ = O^+H^+ - H^+O^+ = -[H,O]$ antihermitesch (i.A. nicht herm., unitär, Proj.Op.)

$(i[H,O])^+ = (-i)(-[H,O]) = i[H,O]$ hermitesch (i.A. nicht antiherm, unitär, Proj.Op.)

$[\mathbb{1}+H]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-H)^n}_{\text{jeder Term hermitesch}}$ hermitesch (i.A. nicht antiherm. unitär, Proj. Op)

$(e^{i[H,O]})^+ = e^{i[H,O]}$ hermitesch (i.A. nicht antiherm. unitär, Proj. Op)

c) bzw b) Emissionslinien bei $E_n - E_m = -Ry\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

d) $|\overset{l}{5}\,\overset{m_l}{5}\,\overset{l'}{3}\,\overset{m_{l'}}{2}\rangle = |\overset{l}{3}\,\overset{m_l}{3}\rangle \otimes |\overset{l'}{2}\,\overset{m_{l'}}{2}\rangle$ (um $m=5$ zu erhalten)

$L_\pm |l\,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\,|l\,m\pm1\rangle$

$\Rightarrow |5\,4\,3\,2\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{5\cdot6 - 5\cdot4}}\underbrace{[\ ]}_{L_- + L'_-}\underbrace{|5\,5\,3\,2\rangle}_{|33\rangle\otimes|22\rangle}$

$= \frac{1}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{10}}\hbar\left[\sqrt{3\cdot4 - 3\cdot2}\,|32\rangle\otimes|22\rangle + \sqrt{2\cdot3 - 2\cdot1}\,|33\rangle\otimes|21\rangle\right]$

$= \sqrt{\frac{3}{5}}\,|32\rangle\otimes|22\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\,|33\rangle\otimes|21\rangle$

A2 bzw B2

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta & 0 \\ \Delta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

EW: $\begin{cases} \begin{vmatrix} \epsilon-\lambda & \Delta \\ \Delta & \epsilon-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{+,-} = \epsilon \pm \Delta \\ \lambda_3 = \epsilon \end{cases}$ EW: $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \beta & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{+,-} = \alpha \pm \beta \end{cases}$

EVekt: $\begin{cases} \lambda_{+,-} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \pm |2\rangle\right) \\ \lambda_3 \Rightarrow |3\rangle \end{cases}$ EVekt: $\begin{cases} \lambda_1 \Rightarrow |1\rangle \\ \lambda_{+,-} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\rangle \pm |3\rangle\right) \end{cases}$

a) bzw b) mit $\begin{cases} \epsilon \to \alpha \\ \Delta \to \beta \end{cases}$

$$|\psi(t^*)\rangle = e^{-\frac{iHt^*}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{iHt^*}{\hbar}}\underset{}{\overset{|3\rangle}{|1\rangle}} = e^{-\frac{iHt^*}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \underset{(-)}{+} |-\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i(\epsilon+\Delta)t^*}{\hbar}}|+\rangle \underset{(-)}{+} e^{-\frac{i(\epsilon-\Delta)t^*}{\hbar}}|-\rangle\right] = \frac{e^{-\frac{i\epsilon t^*}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\Delta t^*}{\hbar}}|+\rangle \underset{(-)}{+} e^{\frac{i\Delta t^*}{\hbar}}|-\rangle\right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\epsilon t^*}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\Delta t^*}{\hbar}}\overset{(|2\rangle+|3\rangle)}{\left(\frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}\right)} \underset{(-)}{+} e^{\frac{i\Delta t^*}{\hbar}}\overset{(|2\rangle-|3\rangle)}{\left(\frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}\right)}\right] = e^{-\frac{i\epsilon t^*}{\hbar}}\left[\cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)\overset{|3\rangle}{|1\rangle} - i\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)\overset{|2\rangle}{|2\rangle}\right]$$

b) bzw c) mit $\begin{cases} \epsilon \to \alpha \\ \Delta \to \beta \end{cases}$

$$\langle\psi(t^*)|\underset{A}{O}|\psi(t^*)\rangle = -(\hbar)\cos^2\left(\frac{\Delta t^*}{\hbar}\right)$$

Mögliche Messwerte:
$\begin{cases} +\hbar \ (+1) & \text{mit Wahrsch. } |\langle 1|\psi(t^*)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\Delta t}{\hbar} \quad (0) \\ 0 & \ldots \ \sin^2\frac{\Delta t}{\hbar} \quad \left(\sin^2\frac{\beta t}{\hbar}\right) \\ -\hbar \ (-1) & 0 \quad \left(\cos^2\frac{\beta t}{\hbar}\right) \end{cases}$

c) bzw a) mit $\begin{cases} \epsilon \to \alpha \\ \Delta \to \beta \end{cases}$

$$|\psi(t^*)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\underset{|1\rangle}{|3\rangle} = e^{-\frac{i\epsilon t^*}{\hbar}}|3\rangle$$

$\langle\psi(t^*)|\underset{A}{O}|\psi(t^*)\rangle = \underset{+1}{-\hbar}$; Mögliche Messwerte/Wahrscheinlichkeiten

$\hbar$	(1)	0	(100%)
0	(0)	0	0
$-\hbar$	(-1)	100%	0

A3 (B4)

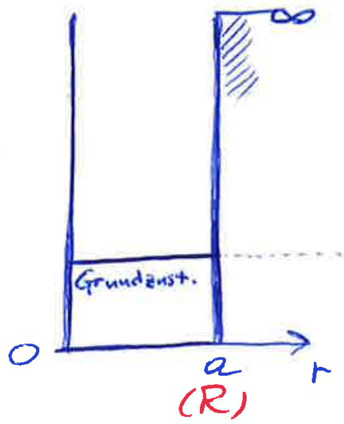
a) (a)) Ansatz: $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R_{nl}(r) + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right]R_{nl}(r) = E\,R_{nl}(r)$$

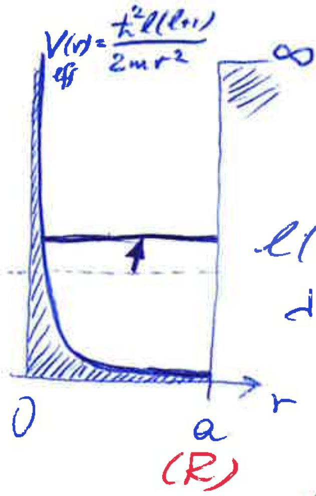
$$R(r) = \frac{u(r)}{r} \Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right]u(r) = E\,u(r)$$

Randbedingungen: $u(0)=0$ und $R(a)=0$ $(R(R)=0)$

b) (b)) $l=0$



$l \neq 0$



$l(l+1)$ ist positiv $\Rightarrow$ der Kasten wird kleiner und weniger tief (siehe auch unten)

c) $r<a$ $(r<R)$ $V=0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}u(r) = E\,u(r) \Rightarrow$

$$u(r) = A\sin(kr) + B\cos(kr)$$

$$R(r) = \frac{A\sin(kr)+B\cos(kr)}{r}$$

$u(0)=0 \Rightarrow B=0$

$R(a)=0$ $(R(R)=0)$ $\Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$ $\left(k=\frac{n\pi}{R}\right)$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\left(A\sin\frac{n\pi}{a(R)}r\right)}_{-A\frac{n^2\pi^2}{a^2(R^2)}\sin\frac{n\pi}{a(R)}r} = E_{n0}\,u(r) \Rightarrow E_{n0} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2\,(R^2)}n^2 = \frac{h^2}{8ma^2\,(R^2)}n^2$$

$$R_{n0}(r) = A\,\frac{\sin\frac{n\pi}{a(L)}r}{r}$$

Alternativ zu b) – Widerspruchsbeweis:

Annahme $\frac{u_l(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi)$ mit $l>0$ ist Grundzustand d.h. $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\frac{u_l(r)}{r} + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right]\frac{u_l(r)}{r} = E_{GS}\frac{u_l(r)}{r}$

$\Rightarrow \frac{u_l(r)}{r}Y_{00}$ Erwartungswert: $\left\langle \frac{u_l(r)}{r}Y_{00}\middle| H \middle| \frac{u_l(r)}{r}Y_{00}\right\rangle = \left\langle \frac{u_l(r)}{r}\middle| -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)+V(r) \middle| \frac{u_l(r)}{r}\right\rangle = E_{GS} - \underbrace{\left\langle \frac{u_l(r)}{r}\middle| \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\middle| \frac{u_l(r)}{r}\right\rangle}_{>0}$

$< E_{GS}$ ↯

bzw. b) mit $K \to K_0$; $\omega \to \omega_0$; $\alpha \to \frac{\beta}{2m}$

A4 bzw. B1

a)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2 + \alpha p^2 \quad \text{mit} \quad p = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$= -\hbar^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2m} + \alpha\right)}_{1/2M} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2 = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2 =$$

mit $M = \frac{m}{1+2m\alpha}$

$$= -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}M\underbrace{\left(\frac{K}{M}\right)}_{\Omega^2}x^2 \implies E_n^{\text{Exakt}} = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

mit $\Omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{\frac{m}{M}} = \omega\sqrt{1+2m\alpha}$ ✓

b) bzw. a)

- Matrix Element der Störung:

$$\langle m|\alpha p^2|n\rangle = -\alpha\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)\langle m|\overbrace{(a^\dagger - a)^2}^{(a^\dagger)^2 + a^2 - 2\hat{N} - 1}|n\rangle =$$

$$\begin{cases} \text{Wenn } m = n+2: & \sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \\ \text{Wenn } m = n: & -2n-1 \\ \text{Wenn } m = n-2: & \sqrt{n}\sqrt{n-1} \end{cases}$$

Sonst ... $\emptyset$

- Erste Ordnung:

$$E_n^{(1)} = \langle n|\alpha p^2|n\rangle = -\alpha\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)(-2n-1) = (\alpha m)(\hbar\omega)\left(n+\frac{1}{2}\right) \;✓$$

- Zweite Ordnung:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|\alpha p^2|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \alpha^2\left(\frac{\hbar^2 m^2\omega^2}{4}\right)\left[\frac{(n+1)(n+2)}{\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(n+2+\frac{1}{2})} + \frac{n(n-1)}{\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - \hbar\omega(n-2+\frac{1}{2})}\right]$$

$$= \hbar\omega\frac{\alpha^2 m^2}{8}\left[n(n-1) - (n+1)(n+2)\right] = -\hbar\omega\frac{\alpha^2 m^2}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) \;✓$$

c) bzw b)

$$E_n^{\text{Stör.}} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\overset{\emptyset\text{ Ordn.}}{1} + \overset{1^{st}\text{ Ord.}}{\alpha m} - \overset{2.\text{ Ordn.}}{\frac{\alpha^2 m^2}{2}} + \dots\right]$$

$$(1+y)^{1/2} \hat{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \dots$$

$$E_n^{\text{Exakt}} = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\sqrt{1+2m\alpha}\left(n+\frac{1}{2}\right) \hat{=} \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 + m\alpha - \frac{m^2\alpha^2}{2} + \dots\right)$$

Störungsentwicklung $\Rightarrow$ Taylor Entwicklung der exakten Lösung! ✓