Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, D. I. G. Rohringer

1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

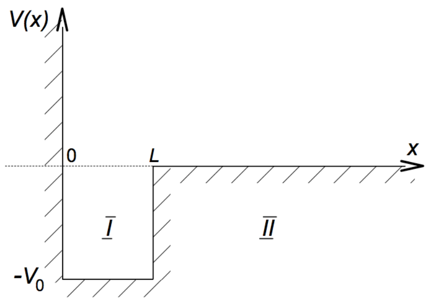
Name: **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
8	8	6+3*	8	30+3*

1. Gebundene Zustände in einem asymmetrischen Potentialtopf.

2+2+2+3=6+3* Punkte*

Gegeben sei das folgende Potential:



$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases}$$

a) Machen Sie einen Ansatz für die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Glg. für $-V_0 < E < 0$ in den Bereichen I und II.

b) Stellen Sie alle Anschlussbedingungen auf.

c) Leiten Sie aus b) eine implizite (nicht nach E aufgelöste) Gleichung für die Energie E (bzw. den Wellenvektor k) her.

d) Welche Bedingungen müssen die Werte von V_0 und L erfüllen, so dass ein oder mehrere gebundene Zustände bestehen?

2. Harmonischer Oszillator

4+0.5+3.5=8 Punkte

a) Zeigen Sie ausgehend von der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \,, \tag{1}$$

dass die untere Schranke für die Energie des Harmonischen Oszillators $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ bei $\hbar\omega/2$ liegt.

b) Drücken Sie x^3 durch die Leiteroperatoren des Harmonischen Oszillators aus.

c) Berechnen Sie $\langle x^3 \rangle$ für alle Eigenzustände des Harmonischen Oszillators.

3. Theoriefragen *2+3+3=8 Punkte*

a) Sei $|\Psi\rangle$ eine beliebige, normierte Wellenfunktion. Welche der folgenden Operatoren sind hermitesch, unitär oder Projektions-Operatoren?

(i) $|\Psi\rangle\langle\Psi|$, (ii) $e^{i|\Psi\rangle\langle\Psi|}$

Gegeben sei nun der Hamilton-Operator $H = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$ (Harmonischer Oszillator).

[1]**b)** Welche der folgenden Operatoren sind Erhaltungsgrößen (Erwartungswert zeitlich invariant)?

(i) p^2, (ii) $a^\dagger - a$, (iii) $(aa^\dagger)^2$

c) Berechnen sie im Heisenbergbild $a_H(t)$ d.h. die Zeitentwicklung des Vernichtungsoperators.

Jeweils kurze(!) Begründung bzw. Rechnung.

Zur Erinnerung: $a/a^\dagger$ sind wie folgt definiert $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{x_0} \pm x_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

4. Zeitentwicklung und Messprozess *3+2.5+2.5=8 Punkte*

Betrachten Sie ein Zweiniveausystem in der (orthonormierten) Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ und Hamilton-Operator

$$H = -\, g \;(i\,|2\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 2|)\,,$$

wobei g eine reelle, positive Konstante ist. In dieser Basis seien auch die Operatoren O, O' durch $O = \frac{1}{2}\,(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ und $O' = \frac{1}{2}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$ definiert [2].

Das System befindet sich bei $t = 0$ im zweiten Zustand, d.h. $|\Psi(t=0)\rangle = |2\rangle$.

a) Berechnen Sie den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$.

[3]**b)** Berechnen Sie den Erwartungswert der Observable O bei $t = t^*$. Welche Messwerte sind für die Observable O möglich, wenn man sie bei $t = t^*$ misst, d.h. welche Messergebnisse werden Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen?

Viel Erfolg!

[1]Heisenbergbild/Zeitentwicklung wird in der Vorlesung noch besprochen.
[2]Physikalisch bedeutet dies, dass das System beispielsweise ein magnetisches Spin-Moment bei einem äußeren magnetischen Feld in y-Richtung darstellt und man das Moment in z-Richtung (S_z) bzw. x-Richtung (S_x) misst.
[3]Messprozess wird in der Vorlesung noch besprochen.