Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, DI. G. Rohringer

2. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
8	7	7+3*	8	30+3*

1. Störungstheorie

1.5+5+1.5=8 Punkte

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Der Hamilton-Operator sei durch den zusätzlichen Beitrag λV (mit $\lambda \ll 1$, $V = \frac{\hbar\omega}{x_0^2}x^2$) gestört.

a) Lösen Sie das Problem exakt.

b) Berechnen Sie in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie die Energie Korrekturen von λV auf das Spektrum von H_0.

c) Sind die Ergebnisse aus **b)** sinnvoll? Warum?

(Zur Erinnerung: Der Effekt des Ortsraum-Operators x auf die Eigenzustände $|n\rangle$ von H_0 ist folgender: $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ mit $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ und $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.)

2. Rotationsymmetrisches Potential

1+3+3=7 Punkte

Ein Teilchen in einem Potential $V_0(r)$ ist durch folgende Wellenfunktion beschrieben

$$\psi(r,\theta,\phi) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{b}} \qquad \text{(mit Konstanten } a \text{ und } b\text{);}$$

$\psi(r,\theta,\phi)$ ist Eigenfunktion des Hamiltonsoperators.

a) Welchen Wert des Drehimpulses (L^2) hat $\psi(r,\theta,\phi)$?

b) Nehmen wir an $V_0(r) \xrightarrow{r\to\infty} 0$. Finden Sie den Energieeigenwert ϵ zu $\psi(r,\theta,\phi)$ unter Beachtung, dass die radiale Gleichung wie folgt ist:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + V_0(r)\right\}\psi(r,\theta,\phi) = \epsilon\psi(r,\theta,\phi)$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der radialen Gleichung und ϵ das Potential $V_0(r)$.

3. Verständnisfragen zur Quantentheorie *3*+2+2+3 Punkte*

a) Welchen möglichen Gesamtdrehimpuls erhält man bei der Kopplung zweier Drehimpulse $l = 3$ und $l' = 2$? Wieviele Zustände hat man insgesamt und für die einzelnen Gesamt-Drehimpulse? Geben Sie zwei Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls an.

b) Stellen Sie das p_y und p_z-Orbital mit $\psi_{p_y}(x, y, z) \sim y/r$ bzw. $\psi_{p_z}(x, y, z) \sim z/r$ durch die Kugelflächenfunktionen dar.

c) Ein Wasserstoff-Atom befindet sich im Zustand

$$\psi(r, \theta, \phi) = [R_{10}(r)Y_0^0(\theta, \phi) - R_{21}(r)Y_1^{-1}(\theta, \phi) + iR_{21}(r)Y_1^1(\theta, \phi)]/\sqrt{3}$$

Geben Sie die möglichen Messwerte einer idealen Drehimpuls(L^2)-Messung an, sowie deren Wahrscheinlichkeiten und die kollabierte Wellenfunktion.

d) Geben Sie alle vollständigen Sätze kommutierender Observablen (je 1-4 Observablen) an, die sich aus den folgenden Operatoren bilden lassen (ohne Beweis):

$$p, \mathcal{P}, x^2, \mathcal{O} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \text{wobei } \mathcal{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$$

4. Messung eines Drehimpulses *2.5+2.5+3=8 Punkte*

Der Hamilton-Operator eines (rotierenden) Teilchens in einem konstanten magnetischen Feld entlang der z-Richtung ($\vec{B} = (0, 0, B)$) ist:

$$H = \frac{L^2}{2I} - \mu B L_z,$$

wobei I und μ das Trägheits- und das magnetische Moment des Teilchens sind.
Bei $t = 0$ ist der (normierte) Zustand des Teilchens ($\int_0^\infty dr\, r^2\, |R(r)|^2 = 1$):

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, R(r)\, (\cos\theta + \sin\theta\cos\phi),$$

.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Messung von L_z für $t = 0$.

b) Bei $t = t^* > 0$ wird nun die Observable L_z gemessen. Was ist der L_z Erwartungswert? Welches sind die möglichen Messwerte, und mit welcher Wahrscheinlichkeiten werden diese gefunden?

c) Wenn in der Messung von L_z bei $t = t^*$ der Messwert $L_z = 0$ gefunden wird, berechnen Sie die möglichen Messwerte und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für eine Messung von L_y bei $t = 2\,t^*$.

Hilfsformel: Kugelflächefunktionen Y_l^m in der $\{L^2, L_z\}$ Basis: $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_1^{\pm 1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$, $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, usw...

Viel Erfolg!