Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, D. I. G. Rohringer

1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
8	8	6+3*	8	30+3*

1. Zeitentwicklung und Messprozess

3+2.5+2.5=8 Punkte

Betrachten Sie ein Zweiniveausystem in der (orthonormierten) Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ und Hamilton-Operator

$$H = -g\ (i\,|1\rangle\langle 2| - i\,|2\rangle\langle 1|)\,,$$

wobei g eine reelle, positive Konstante ist. In dieser Basis seien auch die Observable O, O' durch $O = \frac{1}{2}\,(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ und $O' = \frac{1}{2}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$ definiert[1].

Das System befindet sich bei $t = 0$ im zweiten Zustand, d.h. $|\Psi(t = 0)\rangle = |2\rangle$.

a) Berechnen Sie den Zustand des Systems $|\Psi(t)\rangle$ für den Zeitpunkt $t = t^* > 0$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Observable O bei $t = t^*$. Welche Messwerte sind für die Observable O möglich, wenn man sie bei $t = t^*$ misst, d.h. welche Messergebnisse werden Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen?

c) Betrachten Sie nun den Fall, dass direkt nach der Messung von O bei $t = t^*$ die Observable O' gemessen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden welche möglichen Messwerte von O' (in Abhängigkeit von den Ergebnissen der Messung von O) gefunden?

2. Verständnisfragen zur Quantentheorie

3+3+2=8 Punkte

Jeweils kurze(!) Begründung bzw. Rechnung.

Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ (Harmonischer Oszillator).

a) Welche der folgenden Operatoren sind Erhaltungsgrößen (Erwartungswert zeitlich invariant)?

(i) p^2, (ii) $a + a^\dagger$, (iii) $(a^\dagger a)^2$

b) Berechnen sie im Heisenbergbild $a^\dagger_H(t)$ d.h. die Zeitentwicklung des Erzeugungssoperators.

Zur Erinnerung: $a/a^\dagger$ sind wie folgt definiert $\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{x_0} \pm x_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

[1] Physikalisch bedeutet dies, dass das System beispielsweise ein magnetisches Spin-Moment bei einem äußeren magnetischen Feld in y-Richtung darstellt und man das Moment in z-Richtung (S_z) bzw. x-Richtung (S_x) misst.

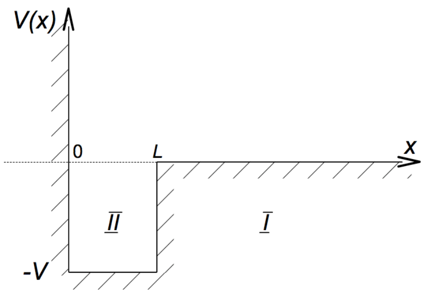
c) Sei $|\Psi\rangle$ nun eine beliebige, normierte Wellenfunktion. Welche der folgenden Operatoren sind hermitesch, unitär oder Projektions-Operatoren?

(i) $|\Psi\rangle\langle\Psi|$, (ii) $e^{-|\Psi\rangle\langle\Psi|}$

3. Gebundene Zustände in einem asymmetrischen Potentialtopf.

2+2+2+3=6+3* Punkte*

Gegeben sei das folgende Potential:



$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -V & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases}$$

Abbildung 1: Skizze des Potentials $V(x)$

a) Machen Sie einen Ansatz für die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Glg. für $-V < E < 0$ in den Bereichen I und II.

b) Stellen Sie alle Anschlussbedingungen auf.

c) Leiten Sie aus b) eine implizite (nicht nach E aufgelöste) Gleichung für die Energie E (bzw. den Wellenvektor k) her.

d) Welche Bedingungen müssen die Werte von V und L erfüllen, so dass ein oder mehrere gebundene Zustände bestehen?

4. Hamilton-Operator mit x und x^2

3+2.5+2.5=8 Punkte

Gegeben sei der Hamilton-Operator

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha x + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

a) Berechnen sie die Energie-Eigenwerte. (*Vor dem Rechnen nachdenken! Noch keine Idee? Evt. hilft eine Skizze.)*

b) Geben Sie die (unnormierte) Wellenfunktion des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands an.

c) Berechnen Sie zu den Wellenfunktionen aus b) die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$.

Viel Erfolg!