Musterlösung Test A bzw Test B in rot (Abweichungen)

A1 bzw. B2

a) bzw c) (i) $(|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi|$ $\Rightarrow$ hermitesch

$|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| \neq \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ Projektor, nicht unitär

(ii) $\left(e^{i|\psi\rangle\langle\psi|}\right)^\dagger = e^{-i|\psi\rangle\langle\psi|}$ $\Rightarrow$ nicht hermitesch / hermitesch

$e^{-i|\psi\rangle\langle\psi|}\, e^{i|\psi\rangle\langle\psi|} = \mathbb{1}$ / $\neq \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ unitär / nicht unitär

b) bzw a) (i) $[p^2, H] = \frac{1}{2}m\omega^2[p^2,x^2] \neq 0$ $\Rightarrow$ keine Erhaltungsgröße

(ii) $\Big[a^\dagger - a \;/\; a + a^\dagger,\; \underbrace{\hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2})}_{H}\Big] = \hbar\omega\, a^\dagger \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} \mp \hbar\omega \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1} a \neq 0$ keine Erhaltungsgröße

(iii) $\Big[\underbrace{(a a^\dagger)^2}_{(a^\dagger a)^2},\; \hbar\omega(\underbrace{a^\dagger a}_{1 - aa^\dagger} + \tfrac{1}{2})\Big] = 0$ da $[A,A]=0$ $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße

c) bzw b) $i\hbar \frac{d}{dt} a_H(t)$ / $a_H^\dagger$ $= [a_H \,/\, a_H^\dagger, \hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2})] = U^\dagger \hbar\omega \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1} a\, U = \hbar\omega a_H$ / $-\hbar\omega a_H^\dagger$; $a^\dagger[a^\dagger, a]$; $U \equiv e^{-iHt/\hbar}$

$\Rightarrow a_H^{(\dagger)}(t) = a_H^{(\dagger)}(0)\, e^{\mp i\omega t}$

A3 bzw. B4

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x$$ für Test B $\alpha \to -\alpha$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \underbrace{\left(x^2 + \frac{2\alpha}{m\omega^2}x + \left(\frac{\alpha}{m\omega^2}\right)^2\right)}_{\big(\underbrace{x + \frac{\alpha}{m\omega^2}}_{\equiv y}\big)^2} - \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\alpha^2}{(m\omega^2)^2}$$

da $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy}$ $\Rightarrow$ Harm. Osz. in y mit konst. Pot $-\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}$

$\Rightarrow$ a) $E = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{m\omega^2}$

b) $\psi_0(y) \sim e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x_0^2}}$ $\quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$\Rightarrow \psi_0(x) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\right)^2/x_0^2}$ Grundzust.

$\psi_1(x) \sim \left(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\right) e^{-\frac{1}{2x_0^2}\left(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\right)^2}$ 1. ang. Zustand

c) $\langle y\rangle = 0$ (symmetrisch) $\Rightarrow \langle x\rangle = \langle y - \frac{\alpha}{m\omega^2}\rangle = \frac{-\alpha}{m\omega^2}$

$\langle p\rangle = 0$ da $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy}$ und $\langle \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}\rangle = 0$

A4 bzw. B1 Für Test B $g \to -g$

a) $H = -g\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$

Eigenwerte/ Eigenvektoren von H: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & ig \\ -ig & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - g^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{+,-} = \pm g$

NORMIERUNG!

$\lambda_\pm = \pm g \Rightarrow \mp \cancel{g} x + i \cancel{g} y = 0 \Rightarrow |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm i|1\rangle + |2\rangle\right)$

Zeitentwicklung: $|\psi(t^*)\rangle = e^{-\frac{iHt^*}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{iHt^*}{\hbar}}|2\rangle$

$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$

$|\psi(t^*)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{igt^*}{\hbar}}|+\rangle + e^{\frac{igt^*}{\hbar}}|-\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\left[i\left(e^{-\frac{igt^*}{\hbar}} - e^{\frac{igt^*}{\hbar}}\right)|1\rangle + \left(e^{-\frac{igt^*}{\hbar}} + e^{\frac{igt^*}{\hbar}}\right)|2\rangle\right]$

$= \sin\left(\frac{gt^*}{\hbar}\right)|1\rangle + \cos\left(\frac{gt^*}{\hbar}\right)|2\rangle$ ✓

b)

Erwartungswert von O: $\langle\psi(t^*)|O|\psi(t^*)\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi(t^*)|1\rangle\langle 1|\psi(t^*)\rangle - \frac{1}{2}\langle\psi(t^*)|2\rangle\langle 2|\psi(t^*)\rangle =$

$= \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{gt^*}{\hbar}\right) - \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{gt^*}{\hbar}\right)$ ✓

Messwerte von O: O ist <u>diagonal</u> in der $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ Basis $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte (= Messwerte) $\pm\frac{1}{2}$

Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse bei $t = t^*$: $\begin{cases} P_{+\frac{1}{2}} = |\langle\psi(t^*)|1\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right) \\ P_{-\frac{1}{2}} = |\langle\psi(t^*)|2\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{gt}{\hbar}\right) \end{cases}$ ✓

c)

$O' = \frac{1}{2}\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ <u>nicht diagonal</u> in der $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ Basis!

$\det\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_{A,B} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ Mögliche Messwerte

$\lambda_{A,B} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \mp\cancel{\tfrac{1}{2}}x + \cancel{\tfrac{1}{2}}y = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right) \\ |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |2\rangle\right) \end{cases}$

Falls $O = +\frac{1}{2}$ bei $t = t^* \Rightarrow |\psi\rangle = |1\rangle$

$\Rightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |B\rangle\right) \Rightarrow P_{O'=\frac{1}{2}} = P_{O'=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (50%)

Falls $O = -\frac{1}{2} \Rightarrow |\psi\rangle = |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle - |B\rangle\right) \Rightarrow P_{O'=\frac{1}{2}} = P_{O'=-\frac{1}{2}} = 50\%$ ✓

A2 bzw B3

$$\mathrm{I}: \psi'' = -q^2 \psi \qquad q = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\mathrm{II}: \psi'' = \kappa^2 \psi \qquad \kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

für Test B
$\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}$
$V_0 \leftrightarrow V$

a) $\mathrm{I}: \psi = A \sin qx \quad (\leftarrow \psi(0)=0)$

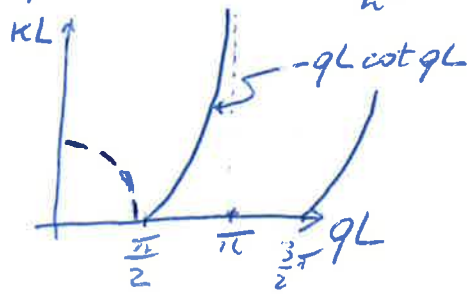
$\mathrm{II}: \psi = C e^{-\kappa x}$

$\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}$

b) $\begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}(0) = 0 \\ \psi_{\mathrm{I}}(L) = \psi_{\mathrm{II}}(L) \rightarrow A \sin qL = C e^{-\kappa L} \\ \psi_{\mathrm{I}}'(L) = \psi_{\mathrm{II}}'(L) \rightarrow Aq \cos qL = -C\kappa e^{-\kappa L} \end{cases}$

c) $\left.\begin{cases} -qL \cot qL = \kappa L \\ (qL)^2 + (\kappa L)^2 = \frac{2mV_0L^2}{\hbar^2} \end{cases}\right\} \Rightarrow (qL)^2 \left[1 + \cot^2 qL\right] = \frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}$ $\quad V_0 \leftrightarrow V$

d)



Ein gebundener Zustand existiert für $\sqrt{\frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}} = \frac{\pi}{2}$

$V_0 \leftrightarrow V$

$\Rightarrow$ Bedingung $\sqrt{\frac{2mV_0L^2}{\hbar^2}} \geq \frac{\pi}{2}$