18/01/2012

# 5. PLENUM: Störungstheorie für den geladenen harmonischen Oszillator

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}_{H_0} - \underbrace{\overset{\text{Ladung}}{q}\,\overset{\text{Elektrisches Feld}}{E}\,x}_{H_1 \overset{\text{(im Skriptum)}}{=} \lambda V}$$

"Ungestörter Hamilton-Operator" "Störungsbeitrag"

- Eigenbasis von $H_0$: $\{|\varphi_n^{(0)}\rangle\} = \{|n\rangle\}$

$$\begin{cases} H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle \\ a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{cases}$$

- In dieser Basis $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a+a^+)$ mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Bemerkung: Die Identifizierung von $H_1$ als Störungsbeitrag von $H_0$ ist möglich, wenn die typischen Energie-Skalen von $H_1$ viel kleiner als die typischen Energie-Skalen von $H_0$ (z.B., wie hier, die Energie-Separation zwischen den verschiedenen Eigenwerten von $H_0$) sind.

Ganz konkret:

Typische Energie-Skala von $H_1$: $\sim qEx_0 = qE\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

typische Energie-Skala von $H_0$: $\sim \hbar\omega$

$$\Rightarrow qE\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \ll \hbar\omega \Longrightarrow$$ Immer möglich, wenn $E$ genügend SCHWACH ist

## Lösung des Beispiels:

1.) Die Matrix-Elemente des Störungsterms $H_1$ in der Eigenbasis von $H_0$ sind Folgende:

$$\langle m|H_1|n\rangle = -qE\langle m|X|n\rangle = -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}}\langle m|(a+a^+)|n\rangle$$

$$= \begin{cases} -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & \text{wenn } m = n-1 \quad (\text{aus } \langle m|a|n\rangle) \\ -\frac{qEx_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n+1} & \text{wenn } m = n+1 \quad (\text{aus } \langle m|a^+|n\rangle) \\ \phi & \text{sonst} \end{cases}$$

Deswegen bekommt man für die Korrekturen der Eigenwerte:

1° Ordnung: $\quad E_n^{(1)} = \langle n|H_1|n\rangle = \phi$

2° Ordnung: $\quad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m|H_1|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} =$

$$= \frac{q^2E^2x_0^2}{2}\left[\frac{|\langle n-1|a|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|\langle n+1|a^+|n\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}}\right] =$$

$$= \frac{q^2E^2x_0^2}{2}\left[\frac{n}{\hbar\omega(\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}+1-\frac{1}{2})} + \frac{n+1}{\hbar\omega(\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}-1-\frac{1}{2})}\right] = -\frac{q^2E^2x_0^2}{2\hbar\omega} = -\frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

Identisch für alle $n$!

und für die Korrekturen der Eigenvektoren:

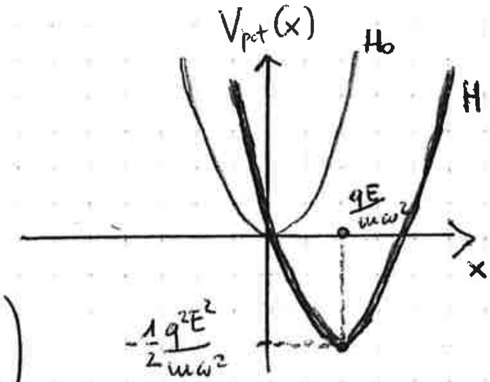
$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n}|m\rangle\frac{\langle m|H_1|n\rangle}{E_n^0 - E_m^0} = |n-1\rangle^{(0)}\left(-\frac{qEx_0\sqrt{n}}{\sqrt{2}\,\hbar\omega}\right) +$$

$$+\ |n+1\rangle^{(0)}\left(\frac{qEx_0\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\,\hbar\omega}\right) = \frac{qEx_0}{\sqrt{2}\,\hbar\omega}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^{(0)} - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^{(0)}\right]$$

2.) Exakte Lösung : das Potential $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx$ ist nur ein harmonisches Potential mit einem verschobenen Minimum (siehe Test 1 !)

- ANALYTISCH -

- GRAFISCH -




$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - qEx =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - \frac{2qEx}{m\omega^2}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - \frac{2qEx}{m\omega^2} + \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4} - \frac{q^2E^2}{m^2\omega^4}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$$

HARMONISCHER OSZILLATOR & KONSTANTE VERSCHIEBUNG !
MIT GLEICHEM $\omega$

Deswegen sind die exakten Eigenwerte die folgenden:

- $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2} = E_n^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2}$
- Vergleich mit Störungstheorie (vom Punkt 1.)
- $E_n \hat{=} E_n^{(0)} + \underbrace{E_n^{(1)}}_{=\emptyset} + E_n^{(2)} + \dots = E_n^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m\omega^2} + \dots$

In diesem Fall, liefert die 2. Ordnung Störungstheorie schon das korrekte Ergebnis!

$\Rightarrow$ Eigentlich kann man zeigen, dass alle höheren Ordnungen der Störungstheorie - in diesem Fall - immer $\emptyset$ liefern.

- ~~Exakte~~ Exakte Eigenvektoren : Da H ein harmonischer Oszillator mit einer verschobenen Gleichgewicht-Position (von $\bar{x}=0$ nach $\bar{x} = \frac{qE}{m\omega^2}$), muss man nur die Eigenvektoren von $H_0$ verschieben !

$$|n\rangle_{Exakt} = T\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right)|n\rangle^{(0)} \quad , \text{mit } T(\bar{x}) = e^{-i\frac{p\bar{x}}{\hbar}}$$

→ Translation Operator

Verschiebung der X-Koordinat

In der Eigenbasis von $H_0$, hat man $p = \frac{i p_0}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$ (mit $p_0 = \sqrt{\hbar\omega m}$)

$$\Rightarrow \quad T\left(\frac{qE}{m\omega^2}\right) = e^{\cancel{-i}\,\cancel{i}\frac{p_0\, qE}{\sqrt{2}\,\hbar\, m\omega^2}(a^+ - a)}$$

$$|n\rangle_{Exakt} = \left(\mathbb{1} + \frac{p_0 qE}{\sqrt{2}\hbar m\omega^2}(a^+ - a) + \dots\right)|n\rangle^0$$

$$= |n\rangle^0 + \frac{p_0 qE}{\sqrt{2}\,\hbar m\omega^2}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^0 - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^0\right] + \dots$$

Diese sind Gleich!

- Vergleich mit der Störungstheorie:

$$|n\rangle_{Stör} = |n\rangle^0 + \frac{qEx_0}{\sqrt{2}\,\hbar\omega}\left[\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^0 - \sqrt{n}\,|n-1\rangle^0\right] + \dots$$

$$\frac{qEx_0}{\sqrt{2}\,\hbar\omega} = \frac{qE}{\sqrt{2m\hbar}\,\omega^{3/2}} \quad ; \quad \frac{p_0 qE}{\sqrt{2}\,\hbar m\omega^2} = \frac{qE}{\sqrt{2\hbar m}\,\omega^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ Für die Eigenvektoren, liefert die 1. Ordnung Störungstheorie den 1. Beitrag der Entwicklung für die exakten verschobenen Eigenvektoren!