Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, Dr. G. Rohringer

1. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

TUTORIUM: Freitag, 14.10.2011.

Wiederholung: Klassische analytische Mechanik

Der Zustand eines klassischen mechanischen Systems ist durch die verallgemeinerten Koordinaten (q_1, $\ldots, q_R$) und Geschwindigkeiten ($\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_R$) eindeutig festgelegt (R bezeichnet die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems). In der Lagrange-Formulierung der klassischen Mechanik definiert man die Lagrange-Funktion $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_R; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_R)$, die auf folgenden Satz von Bewegungsgleichungen (R Differentialgleichungen zweiter Ordnung) führt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = 0\,, \quad r \in \{1, 2, \ldots, R\}\,.$$

Die Bewegungsgleichungen können ebenso von einem Variationsprinzip, dem Prinzip der kleinsten Wirkung, abgeleitet werden oder, nach Definition der verallgemeinerten (konjugierten) Impulse $p_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}$, durch Transformation des Systems in die Hamilton-Formulierung. Im Hamilton-Formalismus ist der Zustand eines mechanischen Systems eindeutig durch je R verallgemeinerte Koordinaten und Impulse festgelegt. Die klassische Hamilton-Funktion steht über

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(q_1, \ldots, q_R; p_1, \ldots, p_R) = \sum_{r=1}^{R} \dot{q}_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} - \mathcal{L}\,,$$

mit der Lagrange-Funktion in Beziehung. Die kanonischen (Hamiltonschen) Bewegungsgleichungen (Satz von $2R$ Differentialgleichungen erster Ordnung) lauten

$$\dot{q}_r \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}\,, \qquad \dot{p}_r \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r}\,, \quad r \in \{1, 2, \ldots, R\}\,.$$

1. Bohrsche Quantisierungsbedingung *4 Punkte*

Die Annahme dieser Theorie ist, dass das betrachtete System den Gesetzen der klassischen Mechanik gehorcht. Allerdings akzeptiert man von den möglichen Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen nur jene, die bestimmten Quantisierungsregeln genügen, was zu einem diskreten Energiespektrum führt. Die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel für periodische Bewegungen mit R Freiheitsgraden lautet

$$\oint p_r\, dq_r = n_r h\,, \qquad n_r \in \mathbb{N}\,, \quad r \in \{1, 2, \ldots, R\}\,,$$

und die entsprechende (quantisierte) Energieniveaus sind definiert als

$$E = \mathcal{H}(q_r, p_r)$$

Bestimmen Sie die Energieniveaus eines eindimensionalen linearen harmonischen Oszillators auf Basis der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung. Die Hamiltonfunktion lautet in diesem Fall

$$\mathcal{H}(x,p) \quad = \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\,\omega^2 x^2 \,.$$

mit $m, \omega > 0$.

2. Hermitesche Matrizen

1.5+1.5+3=6 Punkte

Sei A eine $N \times N$ *hermitesche* Matrix, d.h. eine Matrix deren Matrix-Elemente a_{ij} für alle $i, j = 1, \ldots, N$ die folgende Bedingung erfüllen

$$a_{ij} = a^*_{ji}$$

In der linearen Algebra kann man beweisen, dass es immer möglich ist, die Matrix A komplett zu diagonalisieren, d.h. eine Basis von N unabhängigen Eigenvektoren zu finden.

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

b) Zeigen Sie nun, dass die Eigenvektoren, die unterschiedlichen Eigenwerten entsprechen, orthogonal sind.

c) Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -t\mathrm{e}^{-i\phi} & 0 \\ -t\mathrm{e}^{i\phi} & \varepsilon & -t\mathrm{e}^{-i\phi} \\ 0 & -t\mathrm{e}^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}; \; E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\cos^2\theta & \varepsilon\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \varepsilon\sin\theta\cos\theta & \varepsilon\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

wobei t, ε, ϕ and θ reell sind. Welche von diesen Matrizen sind hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von B, C, D (mit der Vereinfachung $\varepsilon = t$) und E und zeigen Sie (für die hermiteschen Matrizen!), dass sie die Eigenschaften **2a)** und **2b)** erfüllen.