Lösung zur 1. Übung Quantenmechanik I

1. Bohrsche Quantisierungsbedingung

Setze die Hamiltonfunktion gleich einer Konstanten (Energieerhaltung!).

$$\mathcal{H}(x,p) = E$$

Obige Gleichung entspricht einer Ellipse im Phasenraum. Das Ringintegral $\oint pdx$ ist gleich der Fläche der Ellipse und es ergibt sich

$$nh = \oint pdx = \frac{2E}{\omega}$$

Die erlaubten Energien sind daher

$$E_n = n\hbar\omega$$

2. Hermitesche Matrizen

a) Betrachte die komplexe Konjugation der Gleichung

$$\lambda_n = \vec{v}_n^\dagger A \vec{v}_n$$

und verwende die Hermitizität von A.

b) Ersetze in dem Ausdruck

$$\vec{v}_i^\dagger \vec{v}_j$$

einmal $\vec{v}_i$ und das andere Mal $\vec{v}_j$ durch $\vec{v}_n = \frac{A\vec{v}_n}{\lambda_n}$. Dadurch ergibt sich

$$\frac{\vec{v}_i^\dagger A \vec{v}_j}{\lambda_i} = \vec{v}_i^\dagger \vec{v}_j = \frac{\vec{v}_i^\dagger A \vec{v}_j}{\lambda_j} = 0$$

c) Die Matrizen B, D und E sind hermitesch. Für die Eigenwerte einer Matrix A muss gelten

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Es sind die Eigenwerte und Vektoren der Matrix

- B: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 1$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = -1$
- C: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 1$

- D: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi} \\ 0 \\ -e^{\imath\phi} \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi} \\ -2 \\ e^{\imath\phi} \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = 2t$ und

  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi} \\ 1 \\ e^{\imath\phi} \end{pmatrix}$ zu $\lambda_3 = -t$
- E: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ zu $\lambda_2 = \epsilon$ und

  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ zu $\lambda_3 = 0$

Das Überprüfen der Eigenschaften **2a)** und **2b)** ist trivial.