Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. G. Sangiovanni, Dr. A. Toschi, Dr. A. Toth, G. Rohringer

2. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2011/2012

TUTORIUM: Freitag, 21.10.2011

Beispiele des Plenums (freiwillig, nicht bewertet!!)

• Eindimensionales Kastenpotential

Betrachten Sie das folgende eindimensionale Potential

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & -\infty < x < -\frac{L}{2} \\ -V_0, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < \infty \end{array} \right\}.$$

i) Berechnen Sie für $V_0 > 0$ ("Potentialtopf") die Eigenzustände $\psi_n(x)$ und die dazugehörigen Energien E_n als Lösung der Eigenwertgleichung $\mathcal{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$ mit

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

für $E_n < 0$ (gebundene Zustände). Geben Sie - in Abhängigkeit von V_0 und L - die maximale Zahl der gebundenen Zustände an.

ii) Berechnen Sie die Lösungen für den Fall $V_0 < 0$ ("Potentialschwelle") und $0 < E < |V_0|$. Nehmen Sie an, dass das Teilchen von $x = -\infty$ kommend auf die Schwelle bei $x = -\frac{L}{2}$ trifft. Kann das Teilchen die Schwelle passieren?

• Diagonalisierbarkeit hermitescher Matrizen

Zeigen Sie dass eine hermitesche Matrix immer diagonalisiert werden kann, d.h. dass sie eine vollständige Eigenbasis besitzt.

---

3. Unschärfeprinzip für den harmonischen Oszillator *3 Punkte*

Zeigen Sie, ausgehend von der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

dass die untere Schranke für die Energie des eindimensionalen harmonischen Oszillators, dessen Hamilton-Operator $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ist, bei $\frac{\hbar\omega}{2}$ liegt.

4. Wellenfunktionen in einem 1D δ-Potential *1+2+2+2=7 Punkte*

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m, das sich in einem Potential $V(x)$ entlang der $x-$Achse bewegt. Der entsprechende Hamilton-Operator ist

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad \text{mit} \quad V(x) = \alpha\,\delta(x)$$

wobei α reell und **negativ** ist.

a) Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion, und geben sie die Anschluss(Stetigkeits)bedingungen bei $x = 0$ an.

b) Berechnen Sie explizit die entsprechenden Wellenfunktionen und Eigenwerte für negative und positive Energien. Wie viele Lösungen gibt es für negative Energien (*"gebundene Zustände"*)? *(Nehmen Sie an, dass das Teilchen von $x = -\infty$ kommend auf das δ-Potential bei $x = 0$ trifft.)*

c) Betrachten Sie den Grenzfall "Potentialtopf"$\rightarrow$ δ-Potential (siehe Plenum) und vergleichen Sie - für gebundene Zustände, also $E < 0$, - die entsprechenden Eigenenergien und Wellenfunktionen mit jenen aus Aufgabe **4b)**.

d) Berechnen Sie nun die Beispiele **4a)-4b)** für den Fall $\alpha > 0$.